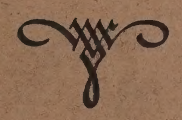
Kleyers Encyklopädie.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie

von Prof. Dr. J. Sachs.

Achter Teil.





Kleyers



Encyklopädie



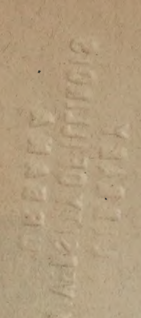
der gesamten

mathematischen, technischen und exakten

Natur-Wissenschaften.

Abteilung:

Raumgrössenlehre I.



Lehrbuch

der

ebenen Elementar-Geometrie

(Planimetrie).

Achter Teil:

Die Anwendung der Aehnlichkeit auf die Lehre vom Kreis.

Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben.

Mit 505 Erklärungen und 135 in den Text gedruckten Figuren.

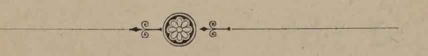
Für das Selbststudium und zum Gebrauche an Lehranstalten

bearbeitet

nach System Kleyer

von

Prof. Dr. **J. Sachs.**



Stuttgart.
Verlag von Julius Maier.
1897.

Druck der Stuttgarter Vereins-Buchdruckerei.

Vorwort.

Mit dem vorliegenden VIII. Teile dieses Lehrbuches wird die Lehre von der Aehnlichkeit zum Abschluss gebracht durch deren Anwendung auf die Kreislehre. Für die dazu gehörende Theorie von den regelmässigen Vielecken und der Kreismessung dürfte die Zusammenstellung in Form einer tabellarischen Uebersicht besonders willkommen sein. Die erweiterte Behandlung der Lehre von der ähnlichen Lage der Kreise, sowie von den Potenzlinien bietet besondere Anregung zum Studium der höheren Teile der Geometrie; ebenso wird der Studierende eingeführt in einige besondere Probleme am Kreise, wie die Polarentheorie und die Grundlagen der Inversionstheorie. Die Sätze von Paskal und Brianchon sind nebst ihren Folgerungen dualistisch durchgeführt; dagegen erfahren die Berührungsaufgaben von Apollonius und von Malfatti eine kürzere Behandlung, da beide Probleme in einem besonderen Buche der Kleyerschen Encyklopädie ausführlich erörtert sind.

Der Aufgabensammlung am Schlusse ist auch in diesem VIII. Teile die grösste Sorgfalt gewidmet; auch die Ergebnisse der ungelösten Aufgaben sind ausführlich mitgeteilt.

Das allein noch ausstehende Gebiet der Planimetrie, nämlich die elementare Theorie der Kegelschnitte, soll einem späteren Ergänzungsbande vorbehalten bleiben.

Baden-Baden, im September 1897.

Prof. Dr. **J. Sachs.**

Inhaltsverzeichnis.

Ebene Elementar-Geometrie (Planimetrie).

Achter Teil.

Die Anwendung der Aehnlichkeit auf die Lehre vom Kreis.

Aufgaben-Sammlung.

Ebene Elementar-Geometrie

(Planimetrie).

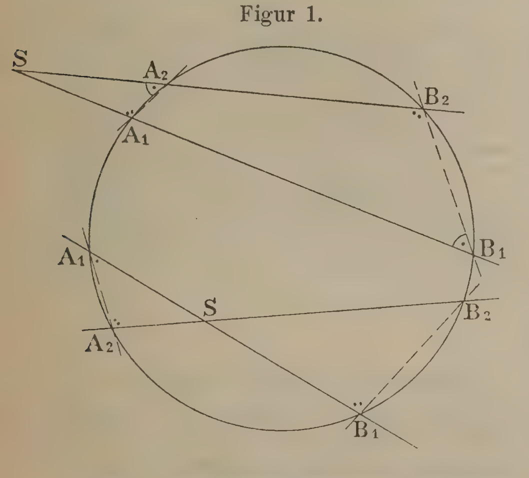
8. Teil.

Die Anwendung der Aehnlichkeit auf die Lehre vom Kreis.

1) Ueber die Aehnlichkeit geradliniger Figuren am Kreise.

Frage 1. Welches ist die einfachste Figur am Kreise, und welche Anwendung der Aehnlichkeit gestattet dieselbe?

Figur 1.



Antwort. Die einfachste Figur am Kreise ist der Sehnen- oder Sekantenwinkel, d. h. die Figur zweier den Kreis schneidenden Geraden, welche durch einen innerhalb oder ausserhalb des Kreises liegenden Punkt hindurchgehen. Bezeichnet man die Schnittpunkte jeder Sekante mit A und B, so bilden die Verbindungsgeraden je zweier Schnittpunkte mit den beiden Sehnen zwei ähnliche Dreiecke.

I. Denn in Figur 1 ist, wenn man den unteren, also den innerhalb des Kreises liegenden Punkt S als gemeinsame Spitze der Dreiecke SA_1A_2 und SB_1B_2 betrachtet,

1) $\sphericalangle A_1SA_2 = B_1SB_2$

als Scheitelwinkel, und

2) $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle B_2$ bezw. $\sphericalangle A_2 = \sphericalangle B_1$

als Peripheriewinkel über den gemeinsamen Kreisbogen A_2B_1 bezw. A_1B_2; also:

$$\triangle SA_1A_2 \sim SB_2B_1.$$

Folglich entsteht die Proportion:

$$SA_1 : SA_2 = SB_2 : SB_1,$$

oder in Produktform:

$$SA_1 \cdot SB_1 = SA_2 \cdot SB_2.$$

II. Wählt man in Figur 1 den oberen, also den ausserhalb des Kreises liegen-

Erkl. 1. Anstatt in Figur 1 die Verbindungsgeraden der Schnittpunkte A_1A_2 und B_1B_2 zu ziehen, kann man ebensowohl auch die Verbindungsgeraden A_1B_2 und A_2B_1 verwenden. Dann vollzieht sich der Beweis in genau analoger Weise mittels der ähnlichen Dreiecke SA_1B_2 und SA_2B_1.

I. Für den innerhalb des Kreises liegenden Punkt S in Figur 2 unten ist nämlich wieder:

1) $\sphericalangle A_1SB_2 = A_2SB_1$

als Scheitelwinkel, und

2) $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2$ bezw. $\sphericalangle B_2 = \sphericalangle B_1$

als Peripheriewinkel über den gemeinsamen Kreisbogen $B_1 B_2$ bezw. $A_1 A_2$; also ist auch hier der Reihe nach:

$$\triangle SA_1 B_2 \sim SA_2 B_1, \quad SA_1 : SA_2 = SB_2 : SB_1,$$
$$SA_1 \cdot SB_1 = SA_2 \cdot SB_2.$$

II. Für den ausserhalb des Kreises liegenden Punkt S in Figur 2 oben ist ebenso:

1) $\sphericalangle A_1 SB_2 = A_2 SB_1$

als gemeinsamer Winkel an der Spitze,

2) $\sphericalangle B_2 = B_1$ bezw. $\sphericalangle B_1 A_1 B_2 = B_2 A_2 B_1$

als Peripheriewinkel über den gemeinsamen Kreisbogen $A_1 A_2$ bezw. $B_1 B_2$, folglich auch:

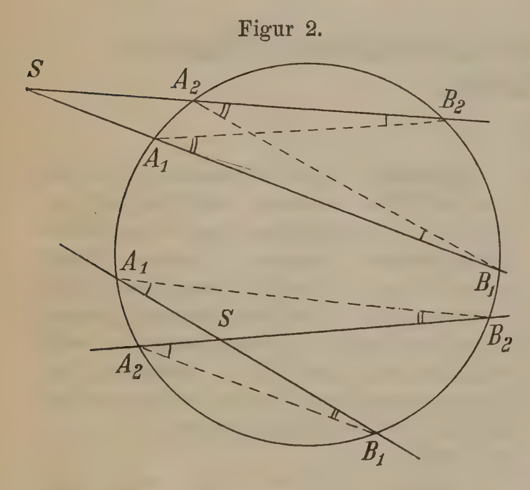
$$180^0 - B_1 A_1 B_2 = 180^0 - B_2 A_2 B_1,$$

d. h.: $\sphericalangle SA_1 B_2 = SA_2 B_1$.

Demnach ist auch jetzt wieder:

$$\triangle SA_1 B_2 \sim SA_2 B_1, \quad SA_1 : SA_2 = SB_2 : SB_1,$$
$$SA_1 \cdot SB_1 = SA_2 \cdot SB_2.$$

Figur 2.



den Punkt S wieder als gemeinsame Spitze der Dreiecke $SA_1 A_2$ und $SB_1 B_2$, so haben diese Dreiecke

1) $\sphericalangle A_1 SA_2 = B_1 SB_2$

als gemeinsamen Winkel an der Spitze, und 2) $\sphericalangle SA_2 A_1 = \sphericalangle SB_1 B_2$,

da sowohl:

$$SA_2 A_1 = 180^0 - A_1 A_2 B_2$$

(als Nebenwinkel), als auch:

$$SB_1 B_2 = 180^0 - A_1 A_2 B_2;$$

denn die beiden Winkel $SB_1 B_2$ und $A_1 A_2 B_2$ stehen als Peripheriewinkel auf den einander zum ganzen Kreise ergänzenden beiden Kreisbogen:

$$\overparen{A_1 A_2 B_2} \text{ und } \overparen{A_1 B_1 B_2}.$$

Aus demselben Grunde ist auch $SA_1 A_2 = SB_2 B_1$, weil beide $= 180^0 - A_2 A_1 B_1$.

Folglich gilt auch hier:

$$\triangle SA_1 A_2 \sim SB_2 B_1$$

und deshalb:

$$SA_1 : SA_2 = SB_2 : SB_1,$$

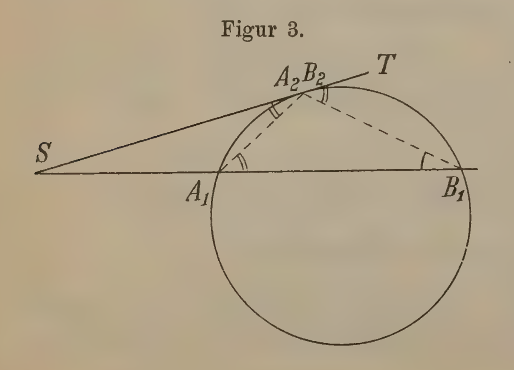
oder:

$$SA_1 \cdot SB_1 = SA_2 \cdot SB_2.$$

Erkl. 2. Die Kreise und Punkte der Figuren 1 und 2 sind genau dieselben wie in Figur 44 des VI. Teiles dieses Lehrbuches. Nur enthält Figur 2 die verschiedene Anordnung der Verbindungsgeraden, um die Allgemeinheit des Beweises zu zeigen. Im VI. Teile war die Figur behandelt auf Grund der Lehre von den antiparallelen Linien. Das Ergebnis (Satz 22) ist aber ein so wichtiger Satz der Planimetrie, dass er auch eine wiederholte Behandlung mit veränderten Hilfsmitteln erfordert.

Frage 2. Welche Abänderung erfährt die vorige Beweisführung, wenn die eine Sekante durch S zur Tangente wird?

Figur 3.



Antwort. Wenn die Sekante $SA_2 B_2$ in Figur 1 oder 2 (oben) zur Tangente wird, so fallen die Punkte $A_2 B_2$ zusammen, und die Abschnitte SA_2 und SB_2 werden identisch (Figur 3).

Dabei entstehen dann immer wieder die ähnlichen Dreiecke $SA_1 A_2$ u. $SB_1 B_2$. Denn es ist:

1) $\sphericalangle S$ gemeinsamer Winkel an der Spitze beider Dreiecke.

2) $\sphericalangle SA_2 A_1 = SB_1 B_2$ als Sehnen-Tangentenwinkel bezw. als Peripheriewinkel über dem gemeinsamen Kreisbogen $A_1 B_2$. Ebenso auch $\sphericalangle SA_1 A_2$

Erkl. 3. Man beachte, dass Figur 3 sowohl aus Figur 1 als aus Figur 2 gleicherweise entsteht, wenn die Punkte A_2 und B_2 immer näher zusammenrücken. Die Sehnen A_1A_2 und B_1B_2 in Figur 1 schieben sich mit ihren Punkten A_2B_2 zu einander, die Sehnen A_1B_2 und B_1A_2 in Figur 2 schieben sich beim Zusammenrücken derselben Punkte auseinander, und die gemeinsame Grenzfigur ist Figur 3.

Erkl. 4. Wenn der Grenzübergang in der durch Erkl. 3 angedeuteten Weise durchgeführt wird, so ist ein neuer Beweis für das Ergebnis nebenstehender Antwort gar nicht erforderlich. Jedoch zeigt der Gang nebenstehender Ueberlegung, dass auch die Betrachtung der Figur 3 als eines selbständigen Falles ebenso sicher zum Ziele führt.

$= SB_2B_1$, weil deren Nebenwinkel $B_1A_1B_2 = B_1B_2T$ als Sehnen-Tangentenwinkel bezw. als Peripheriewinkel über dem gemeinsamen Kreisbogen B_1B_2 einander gleich sind. Daher ist auch hier:

$$\triangle SA_1A_2 \sim SB_2B_1$$

und folglich:

$SA_1 : SA_2 = SB_2 : SB_1$, $SA_1 \cdot SB_1 = SA_2 \cdot SB_2$;

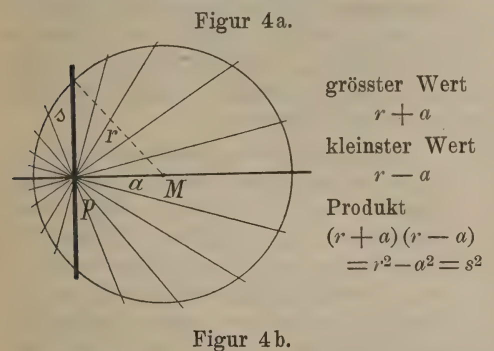
und mit Einsetzung der Gleichheiten SA_2 und SB_2:

$$\overline{SA_2}^2 = SA_1 \cdot SB_1 = \overline{SB_2}^2.$$

Frage 3. Wie werden die Ergebnisse der vorigen Antwort zusammengefasst?

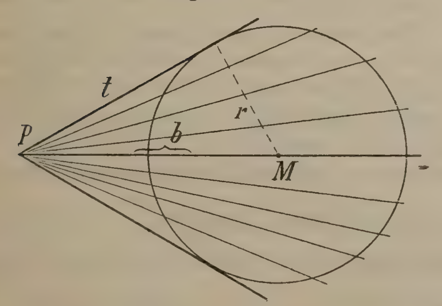
Erkl. 5. In Figur 4 ist jeweils eine Anzahl von Sekanten durch den Punkt P gezogen. Darunter sind besonders beachtenswert der Durchmesser sowie in Figur 4a die senkrechte Halbsehne s, in Figur 4b die Tangente t. Auf dem Durchmesser liegt jeweils die längste und die kürzeste Strecke vereint, nämlich, wenn PM mit a bezw. b bezeichnet wird, —

Figur 4a.



grösster Wert $r + a$
kleinster Wert $r - a$
Produkt $(r + a)(r - a) = r^2 - a^2 = s^2$

Figur 4b.



grösster Wert $b + r$
kleinster Wert $b - r$
Produkt $(b + r)(b - r) = b^2 - r^2 = t^2$.

Antwort. Die Ergebnisse der vorigen Antwort werden in Worten ausgedrückt in dem wichtigen Doppelsatz, dessen einzelne Teile, zusammengefasst für den inneren bezw. äusseren Punkt, man wohl auch den Sehnensatz bezw. den Sekantensatz nennt:

Satz 1. Für alle durch einen Punkt P gehenden Sekanten eines Kreises hat das Produkt der beiden Abschnitte zwischen dem Punkt P und den Kreisschnittpunkten denselben Wert, genannt die „Potenz des Punktes P in Bezug auf den Kreis“, und ist gleich der Differenz zwischen dem Quadrate des Abstandes von dem Punkte P zum Kreismittelpunkt und dem Quadrate des Radius.

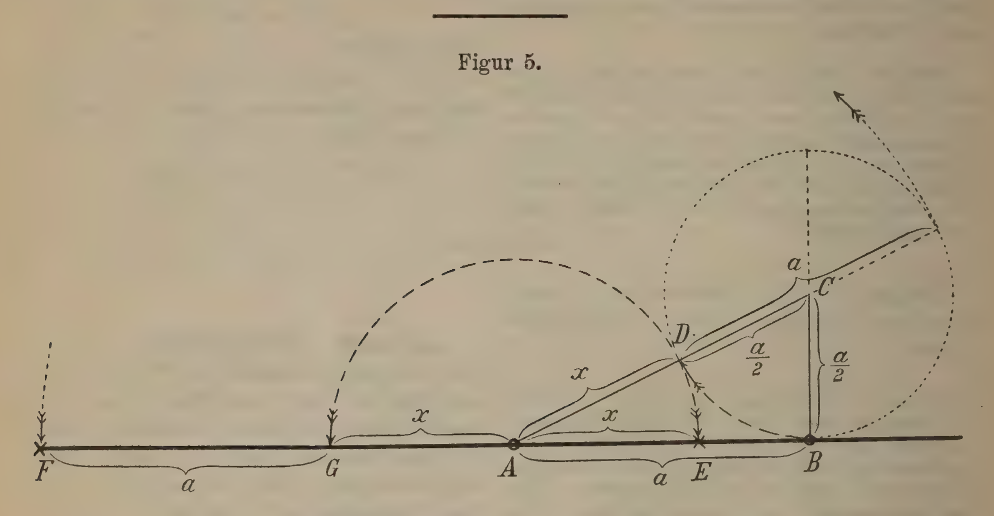
Satz 1a. Im besondern ist die Potenz eines inneren Punktes gleich dem Quadrate der auf dem Durchmesser dieses Punktes senkrecht stehenden Halbsehne, die Potenz eines äusseren Punktes gleich dem Quadrat des Tangentenabschnittes von dem Punkt bis an den Kreis.

Satz 1b. Der Wert der Potenz ist für den Mittelpunkt $= r^2$, für einen Peripheriepunkt $= 0$, und wächst bei zunehmender Entfernung des Punktes P vom Kreise unbegrenzt.

Erkl. 6. Zum gleichen Ergebnis gelangt man auch durch Betrachtung der rechtwinkligen Dreiecke, welche von PM mit dem Radius gebildet werden. In Figur 4 a ist r Hypotenuse, s und a Katheten, also $s^2 = r^2 - a^2$. In Figur 4 b ist b Hypotenuse, t und r Katheten, also $t^2 = b^2 - r^2$.

Erkl. 7. Die Bezeichnung des konstanten Produktes mit dem Namen „Potenz" stammt von dem berühmten Mathematiker Steiner, welcher diesen Namen einführte in einer 1826 erschienenen, äusserst hervorragenden Abhandlung unter dem bescheidenen Titel „Einige geometrische Betrachtungen".

Figur 5.



Frage 4. Welches ist die wichtigste Anwendung des vorigen Satzes?

Erkl. 8. Die im Nebenstehenden angegebene erweiterte Form der Aufgabe der stetigen Teilung oder des goldenen Schnittes ist merkwürdigerweise der antiken Geometrie völlig fremd geblieben. Alle alten Geometer beachteten blos den inneren Teilpunkt; erst die verallgemeinernden und auf weiteren Ueberblick gerichteten Bestrebungen der neueren geometrischen Wissenschaft haben dazu geführt, auch die vorliegende Aufgabe mit innerer und äusserer Teilung zu behandeln. (Dabei muss man allerdings die Verwechslung vermeiden, als ob E und F Teilpunkte gleichen Teilungsverhältnisses wären.)

Erkl. 9. Aus Berücksichtigung des Satzes 1 erkennt man, dass der zum goldenen Schnitte verwandte Kreis nicht unbedingt die Strecke a als Durchmesser zu haben braucht. Vielmehr entsteht die Gleichheit der Produkte:

$$a^2 = x(a + x)$$

stets dann, wenn die Strecke a gleichzeitig Tangente und beliebige Sehne des Kreises ist. Man kann daher die Aufgabe sogar mit jedem beliebigen Kreise lösen. (Siehe die hierhergehörigen Aufgaben der Aufgabensammlung am Schlusse dieses Teiles.)

Erkl. 10. Wie schon im V. Teile aus der Gleichung $x^2 = a(a - x)$ abgeleitet wurde, lassen sich alle Teilstrecken der Figur 5 al-

Antwort. Die wichtigste Anwendung des vorigen Satzes ist diejenige auf die sog. „Aufgabe des goldenen Schnittes" Dieselbe lautet in ihrer allgemeinsten Form:

Eine gegebene Strecke durch einen (inneren bezw. äusseren) Punkt so zu teilen, dass das Quadrat des einen (grösseren bezw. kleineren) Abschnittes gleich wird dem Rechteck aus dem andern (kleineren bezw. grösseren) Abschnitt und der Strecke selbst.

Die gewöhnlichste Lösung dieser Aufgabe (vergl. Antwort der Frage 90 des V. Teiles und Antwort 68 des VI. Teiles dieses Lehrbuches) besteht darin, dass über der Strecke $AB = a$ als Kathete ein rechtwinkliges Dreieck errichtet wird mit der zweiten Kathete $\frac{a}{2}$. Schneidet man dann von dessen Hypotenuse dasselbe Stück $\frac{a}{2}$ ab, so liefert der Rest x die Entfernung des gesuchten Teilpunktes vom Endpunkt der Strecke AB,

gebraisch durch a ausdrücken; denn aus jener Gleichung geht hervor:

$$x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1) = 0{,}618033\,a,$$

also in Figur 5:

$$AB = 1,\ AE = 0{,}618033,\ BE = 0{,}381967$$

oder:

$$AB = 1,\ AF = 1{,}618033,\ BF = 2{,}618033.$$

Und da:

$$AE^2 = AB \cdot BE,$$

so ist:

$$0{,}618033^2 = 0{,}381967$$

und da:

$$AF^2 = AB \cdot BF,$$

so ist:

$$1{,}618033^2 = 2{,}618033.$$

(Man vergleiche hierzu die Erkl. 366 des VI. Teiles dieses Lehrbuches.)

Erkl. 11. Der Name des „goldenen Schnittes" (sectio aurea) war schon im Altertume bekannt; auch im Mittelalter beschäftigte man sich eifrig mit dieser Aufgabe und ihren Anwendungen. Für das Teilungsverhältnis:

$$EB : EA = (a - x) : x = 1 : 1{,}618033$$

wurde von einem italienischen Mathematiker, dem Mönche Pacioli (1509), zuerst der Name proportio divina gebraucht. („Wegen der sehr nützlichen und ausgezeichneten Eigenschaften habe eine so geteilte Strecke gewissermassen eine göttliche Proportion.") Von diesem Ausdruck stammt dann auch der Name sectio divina. — Der Name „stetige Teilung" dagegen entstammt der stetigen Proportion:

$$BE : EA = EA : AB$$

oder: $(a - x) : x = x : a,$

in welcher eben x als das mittlere Glied gesucht wird.

und zwar entweder als x selbst nach innen für innere oder auch nach Verlängerung auf $x + a$ nach aussen für äussere Teilung.

Denkt man sich nämlich den Kreis mit Radius $\frac{a}{2}$ um die dritte Ecke des rechtwinkligen Dreiecks vervollständigt, so hat derselbe den Durchmesser a, Sekantenabschnitte x und $x + a$, Tangente a; folglich gilt die Beziehung:

$$a^2 = x(a + x).$$

Trägt man nun das Stück x auf a als AE innerlich und als AG äusserlich an und verlängert noch AG um $GF = a$, so hat man für den inneren Teilpunkt E als grösseren Abschnitt $AE = x$, als kleineren Abschnitt $BE = a - x$, für den äusseren Teilpunkt F als grösseren Abschnitt $BF = 2a + x$, als kleineren Abschnitt $AF = a + x$. Und es ist:

1) $AE^2 = AB \cdot BE$ oder $x^2 = a(a - x)$
2) $AF^2 = AB \cdot BF$ od. $(a + x)^2 = a(2a + x)$.

Denn beide Gleichungen gehen zurück auf die obige:

$$a^2 = x(a + x).$$

Die erste nämlich gibt $x^2 = a^2 - ax$, also $a^2 = ax + x^2$ wie oben; und die zweite gibt $a^2 + 2ax + x^2 = 2a^2 + ax$, also durch Vereinigung der gleichnamigen Glieder ebenfalls $ax + x^2 = a^2$, wie oben.

Erkl. 12. Auch in der Neuzeit ist über das „Verhältnis des goldenen Schnittes":

$$0{,}381967 : 1 = 1 : 1{,}618033,$$

also: $EB : EA = EA : AB = (a - x) : x = x : a$ oder: $m : n = n : (m + n)$

viel geschrieben worden (Zeising, Pfeifer u. a.). Dieses Verhältnis zeigt sich nämlich auffallend oft verwirklicht in Natur und Kunst. Eine grosse Zahl von Gestaltungsgesetzen in Botanik (Blattstellungen, Blattformen u. s. w.) und Zoologie (besonders bei Insekten, z. B. Flügelbreite: Flügellänge, Kopflänge: Hinterleibslänge, Rüssel: Kopf u. s. w.) weisen thatsächlich dieses Verhältnis auf, welches daher als „der vollkommenste Ausdruck der Einheit in der Mannigfaltigkeit" gepriesen wird. Auch am menschlichen Körper wird dasselbe gefunden (Ober- und Unterkörper, Handgliederung). Aber auch in Kunst und Kunstgewerbe erweist sich dieses Verhältnis von „hervorragender ästhetischer Wirksamkeit", indem die Formate von Büchern, Bildern, Thüren u. s. w. von dem Auge mit mehr oder weniger Bewusstsein dann wohlgefällig befunden werden, wenn deren Breite und Länge in jenem Verhältnis stehen.

Erkl. 13. Auch in der Mathematik selbst erscheint das Verhältnis des goldenen Schnittes wiederholt, so besonders bei der Konstruktion des regelmässigen Zehnecks (siehe den folgenden Abschnitt dieses Teiles), bei den Zahlen der sog. Laméschen Reihe, den Näherungswerten des Kettenbruches:

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}} \quad \text{u. s. w.}$$

[Die Näherungswerte dieses Kettenbruches sind:

$$1:2,\ 2:3,\ 3:5,\ 5:8,\ 8:13 \text{ u. s. w.},$$

also die Brüche je zweier aufeinanderfolgenden Zahlen der Reihe:

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21 \cdots,$$

in welcher jedes folgende Glied durch Addition der beiden vorhergehenden gebildet wird. Diese Näherungswerte nähern sich aber immer mehr dem obigen Werte:

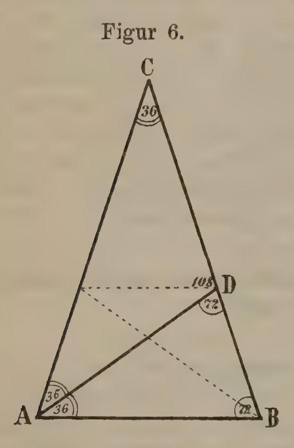
$$1:1{,}618033 = 0{,}381967;$$

denn setzt man den Wert des ganzen Kettenbruches gleich x, so ist offenbar:

$$x = \frac{1}{1+x}, \quad \text{also:} \quad x + x^2 = 1 \quad \text{und} \quad x = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5}) = 0{,}381967 = 1:1{,}618033.]$$

Frage 5. Welche Winkel hat ein gleichschenkliges Dreieck, bei welchem die Grundseite gleich dem goldenen Abschnitte des Schenkels ist?

Figur 6.



Antwort. Wenn bei dem gleichschenkligen Dreieck ABC in Figur 6 die Grundseite AB gleich dem goldenen Abschnitt des Schenkels $AC = BC$ ist, so muss sich verhalten:

$$AB : BC = (BC - AB) : AB.$$

Ist also D der goldene Teilpunkt des Schenkels BC, so ist:

$$CD : BC = (BC - CD) : CD,$$

folglich $AB = CD$.

Verbindet man also A mit D, so haben die Dreiecke ABC und DBA gemeinsam denselben Winkel bei B, und das Verhältnis der einschliessenden Seiten ist erst $AB:BC$, dann $BD:AB$, also nach obiger Gleichung ebenfalls dasselbe. Folglich ist $\triangle ABC \sim DBA$; beide Dreiecke sind gleichschenklig, also $BA = AD = DC$ und ferner die Winkel beider Dreiecke dieselben, also:

$$\sphericalangle C = \sphericalangle DAB.$$

Da aber nach vorigem $AD = DC$, so ist auch das Dreieck ADC gleichschenklig, also auch:

$$\sphericalangle C = \sphericalangle DAC.$$

Demnach ist:

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle DAC,$$

d. h. AD ist Halbierungslinie des Winkels CAB, und die Winkel des Dreiecks ABC sind:

$$A = \alpha,\ \ B = \alpha,\ \ C = \frac{\alpha}{2};$$

folglich wird:

$$180^0 = \frac{5}{2}\alpha, \quad \alpha = \frac{4}{5}\cdot 90^0 = 72^0 = 2\cdot\gamma;$$

oder:

$$C = \gamma,\ \ A = 2\gamma,\ \ B = 2\gamma,$$

also:

$$180^0 = 5\gamma,\ \ \gamma = \frac{2}{5}\cdot 90^0 = 36^0 = \frac{\alpha}{2}.$$

Erkl. 14. Man nennt wohl ungenau, aber abkürzend mit den Namen „goldener Abschnitt“ bezw. „goldener Teilpunkt“ den grösseren Abschnitt oder den Teilpunkt, welcher bei der Teilung nach dem goldenen Schnitte entsteht. Derartige sprachliche Ungenauigkeiten werden in vielen Gebieten der Mathematik bewusst oder unbewusst zugelassen und pflegen sich, solange die Kürzung des Ausdrucks keine Ungenauigkeit des Inhalts herbeiführt, immerhin gewisser Duldung zu erfreuen.

Erkl. 15. Das Dreieck der Figur 6 war schon in früheren Teilen Gegenstand der Betrachtung (III. Teil, Aufgaben 127, 144 u. ff.). Es ist nämlich ein Uebungsbeispiel, für die Winkel des Dreiecks zu beweisen, dass wenn der Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks der Hälfte des Basiswinkels gleich ist, dann die Grössen aller drei Winkel festgelegt sind, nämlich wie hier:

$\triangle ABC$:	$A = 72$	$B = 72$	$C = 36$
BDA:	$B = 72$	$D = 72$	$A = 36$
CAD:	$C = 36$	$A = 36$	$D = 108.$

Frage 6. Welches Ergebnis liefert die vorige Ueberlegung?

Antwort. Man erhält aus der vorigen Ueberlegung den Satz:

Satz 2. Wenn in einem gleichschenkligen Dreieck die Grundseite gleich dem grösseren Abschnitt des nach dem goldenen Schnitt geteilten Schenkels ist, so ist der Basiswinkel das Doppelte des Winkels an der Spitze, nämlich ersterer $\frac{4}{5} R = 72^0$, letzterer $\frac{2}{5} R = 36^0$.

Und umgekehrt:

Satz 2a. Wenn in einem gleichschenkligen Dreieck der Winkel an der Spitze **36⁰** hat, so ist die Grundseite gleich dem grösseren Abschnitt des nach dem goldenen Schnitte geteilten Schenkels.

Erkl. 16. Der nebenstehende Satz ermöglicht es, einen Winkel von 36⁰ Grad überhaupt zu konstruieren, was mit den bisherigen Mitteln der Planimetrie nicht möglich war. Und darin liegt eben die grosse Wichtigkeit der Teilung nach dem goldenen Schnitte für die Planimetrie, dass zu den bisherigen Gruppen der mit Lineal und Zirkel konstruierbaren Winkel — nämlich $60^0, 30^0, 15^0$ u. s. w. und $90^0, 45^0, 22\frac{1}{2}^0$ u. s. w. — eine neue Gruppe hinzutritt, nämlich 36^0, 18^0, 9^0 u. s. w.

Erkl. 17. Für Konstruktionsaufgaben ist es wichtig, dass beim gleichschenkligen Dreieck die drei Bedingungen identisch werden, die ursprünglich ganz verschieden erscheinen, nämlich 1) die Angabe der Winkelgrössen selbst als 36^0, 72^0, 72^0, 2) die Bestimmungsgleichung unter den Winkeln, dass der Winkel an der Spitze gleich der Hälfte des Basiswinkels (oder umgekehrt der Basiswinkel das Doppelte des Winkels an der Spitze), 3) die Bestimmungsgleichung unter den Seiten, dass die Basis der goldene Abschnitt des Schenkels sei.

Erkl. 18. Ein weiterer Gesichtspunkt, unter welchem die Sätze 2 äusserst bemerkenswert erscheinen, ist der folgende: Die Planimetrie liefert verhältnismässig nur selten die Gelegenheit, dass aus Seitenbeziehungen auf Winkelgrössen geschlossen werden kann und umgekehrt. Und von diesen wenig zahlreichen Fällen einer Beziehung zwischen Seiten und Winkelgrössen der Dreiecke liegt einer vor in den obigen Sätzen. Die wichtigsten Fälle sind etwa folgende: 1) Der grösseren von zwei Seiten eines Dreiecks liegt auch der grössere Winkel gegenüber, gleichen Seiten gleiche Winkel — nebst Umkehrungen. 2) Gleichheit der drei Seiten bedingt Winkel von 60⁰ — nebst Umkehrung. 3) Ist das Quadrat einer Seite gleichgross (grösser oder kleiner) wie die Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, so ist der Gegenwinkel gleichgross (grösser oder kleiner) wie 90⁰ und umgekehrt. 4) Proportionalität der Seiten zweier Dreiecke bedingt Gleichheit ihrer Winkel — und umgekehrt. Und hierzu 5) der obige Satz 2. Der weitere Ausbau dieser Beziehungen zu einer allgemein anwendbaren Bestimmung der Seiten und Winkel bildet den Gegenstand der Trigonometrie.

Frage 7. Welche wichtige Anwendung der Aehnlichkeit liefert das Sehnenviereck?

Antwort. Die bemerkenswerteste Anwendung der Aehnlichkeit auf das Sehnenviereck bildet der sogenannte Ptolemäische Lehrsatz:

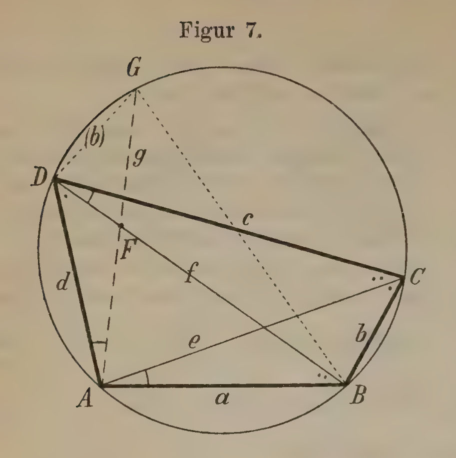
Satz 3. Im Sehnenviereck ist das Produkt der Diagonalen gleich der Summe der beiden Produkte aus je zwei gegenüberliegenden Seiten.

Beweis.

Ist $ABCD$ in Figur 7 ein Sehnenviereck mit den Seiten $abcd$ und den Diagonalen e und f, so trage man in

Erkl. 19. Der nebenstehende Satz ist benannt nach dem Alexandriner Mathematiker Claudius Ptolemäus, welcher denselben in seinem zwischen 125 und 151 n. Chr. abgefassten Sammelwerke von 13 Büchern, „Almagest", veröffentlichte (I. Buch, 9. Kap.). Es ist derselbe Ptolemäus, nach dessen Namen man von einem Ptolemäischen Himmelssystem spricht, und dessen Trigonometrie schon alle Grundlagen der heutigen Wissenschaft gleichen Namens enthielt.

Figur 7.



einem Eckpunkt (z. B. A) den von der Diagonale (e) mit der einen Seite (a) gebildeten Winkel auch an der andern Seite (d) an, also $\sphericalangle BAC = DAG$. Dann entstehen durch den Schnitt des neuen Winkelschenkels mit der Diagonale f zwei Dreiecke, welche den von der andern Diagonale gebildeten Teildreiecken des Vierecks ähnlich sind. Im Dreieck AFD ist nämlich ausser dem abgetragenen Winkel bei A auch $\sphericalangle ADF$ als Peripheriewinkel über dem Bogen AB gleich dem über demselben Bogen stehenden Winkel ACB des Dreiecks ACB, folglich:

$$\triangle AFD \sim ABC,$$

also:

$$AD:FD = AC:BC \text{ oder } d:FD = e:b.$$

Ebenso ist im Dreieck ABF der Winkel FAB gleich dem Winkel CAD des Dreiecks CAD, weil jeder aus dem gemeinsamen Stück $\sphericalangle FAC$ zusammen mit einem der gleichgrossen Stücke $BAC = DAG$ besteht; und ferner ist $\sphericalangle ABF$ als Peripheriewinkel über dem Bogen AD gleich dem auf demselben Bogen stehenden Winkel ACD, folglich:

$$\triangle ABF \sim ACD,$$

also:

$$AB:BF = AC:CD \text{ oder } a:BF = e:c.$$

Hieraus entsteht:

$$e \cdot BF = a \cdot c;$$

und aus obigem:

$$e \cdot FD = b \cdot d.$$

Durch Addition entsteht:

$$e(BF + FD) = ac + bd,$$

also:

$$e \cdot f = ac + bd \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Erkl. 20. Statt den Winkel (ae) in A an d anzutragen als DAG, kann man auch den Winkel (ed) in A an a antragen als BAG und erhält dadurch denselben neuen Winkelschenkel AG. Nimmt man nämlich den kleineren Winkel, so liegt der neue Schenkel im andern Winkel; nimmt man den grösseren Winkel, so fällt der neue Schenkel noch in denselben Winkel; sowie aber $\sphericalangle BAC = DAG$, so folgt von selbst auch $BAG = DAC$.

Erkl. 21. Eine weitere Willkür besteht in der Wahl des Eckpunktes, an welchem man das Abtragen des Winkels vollziehen will: In A den $\sphericalangle(ae)$ an d, oder in B den $\sphericalangle(af)$ an b, oder in C den $\sphericalangle(ce)$ an b, oder in D den $\sphericalangle(cf)$ an d. Der Beweis bleibt derselbe. So hat man z B. in Figur 8, wo das zweite geschehen:

$$1) \ \triangle CBE \sim DBA,$$

weil:

$$\sphericalangle CBE = \sphericalangle(af) \text{ und } \sphericalangle BCE = BDA,$$

beide über Bogen AB. Folglich:

$$CB:CE = DB:DA \text{ oder } b:CE = f:d,$$

also:

$$f \cdot CE = b \cdot d.$$

$$2) \ \triangle ABE \sim DBC,$$

weil:

$$\sphericalangle ABE = (af) + DBE = CBE + DBE$$
$$= DBC \text{ und } \sphericalangle BAE = BDC,$$

beide über Bogen BC. Folglich:

$$AB:AE = DB:DC \text{ oder } a:AE = f:c,$$

also:

$$f \cdot AE = a \cdot c.$$

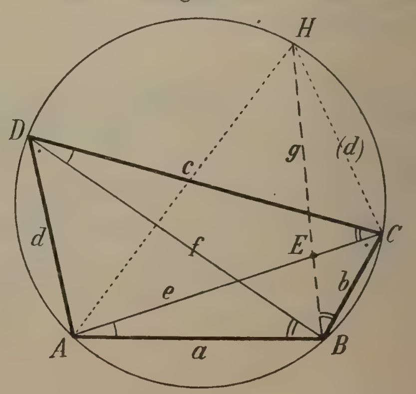
Addition gibt wieder:

$$f(AE + EC) = ac + bd$$

oder:

$$e \cdot f = ac + bd.$$

Figur 8.



Frage 8. Wie lässt sich auf Grund des vorigen Satzes auch ein Wert für das Verhältnis der Diagonalen im Sehnenviereck bestimmen?

Erkl. 22. Die beiden Sehnenvierecke $ABGD$ und $ABCH$ in Figur 7 und 8 kann man sich auch anders entstanden denken, als durch das Antragen des $\sphericalangle(ae)$ an d bezw. $\sphericalangle(af)$ an b. Hält man nämlich in Figur 7 das Dreieck DAB fest und denkt sich das andere Dreieck BCD umgeklappt um die Mittelsenkrechte der festen Diagonale f, so kommt B nach D, $\sphericalangle BAC$ auf $\sphericalangle DAG$ wie beim vorigen Abtragen des Winkels, und man erkennt sofort, dass $BC = DG$ und $DC = BG$. Daher ist schon in Figur 7 an DG die Grösse b (in Klammer) beigefügt, und Buchstabe c gilt sowohl für DC als BG. Dabei wird aber AC nicht gleich AG, weil Bogen $\widehat{AB}$ nicht gleich $\widehat{AD}$. Ebenso entsteht Dreieck ACH in Figur 8 aus Dreieck CAD durch Umklappen um die Mittelsenkrechte von AC, während das Dreieck ABC festgehalten wird. Daher ist:

$$\triangle ACH \cong CAD,$$

also:

$$CH = AD = d,\; AH = CD = c$$

(gemeinsamer Buchstabe c), aber BH nicht gleich BD, weil Bogen $\widehat{BC}$ nicht gleich $\widehat{BA}$.

Erkl. 23. Die Gleichheit der Sehnen AG und BH kann auch gefolgert werden aus der Kongruenz der Dreiecke:

$$ABH \cong BAG \text{ oder } BCH \cong GDA.$$

Jedesmal sind zwei Seitenpaare gleichgross: beide gleich a und c bezw. beide gleich b und d. Und der eingeschlossene Winkel, der mit ε bezw. ζ bezeichnet sein möge, ist jedesmal auf demselben Bogen über dem zu den Sehnen b und d bezw. a und c gehörigen Kreisbogen.

Erkl. 24. Die drei Sehnenvierecke $ABCD$, $ABGD$, $ABCH$ bestehen nach vorigem aus denselben vier Seiten mit jeweils veränderter Reihenfolge und mit paarweise je einer gemeinsamen Diagonale, nämlich:

$ABCD$	Seiten:	$abcd$	Diagonalen	fe
$ABGD$	„	$acbd$	„	gf
$ABCH$	„	$abdc$	„	eg

Dieselben haben denselben Radius des Umkreises und denselben Flächeninhalt. Denn sie sind demselben Kreise eingeschrieben und setzen sich nach Erkl. 22 aus kongruenten Dreiecken zusammen:

$$ABCD = ABC + ACD$$

oder: $= ABD + BCD$,

wovon ersteres: $= ABC + ACH = ABCH$,

letzteres: $= ABD + BDG = ABGD$,

beide letzteren gleich:

$$\triangle(acg) + (bdg).$$

Antwort. A) Da der Satz des Ptolemäus nicht nur für das eine Sehnenviereck, sondern für jedes beliebige bewiesen ist, so gilt er z. B. auch für die beiden Sehnenvierecke, welche durch das Antragen der Winkel (af) an b bezw. (ae) an d in Figur 8 und Figur 7 entstanden sind, nämlich die Sehnenvierecke $ABCH$ (Fig. 8) u. $ABGD$ (Fig. 7). Man hat also im ersteren:

$$AC \cdot BH = AB \cdot CH + BC \cdot AH$$

und im letzteren:

$$AG \cdot BD = AB \cdot DG + BG \cdot AD$$

Nun sind aber alle Stücke dieser Gleichungen mit Ausnahme der neu hinzugekommenen Diagonalen BH bezw. AG schon im ursprünglichen Sehnenviereck $ABCD$ enthalten, nämlich zunächst:

$$AC = e,\; AB = a,\; BC = b,\; BD = f,\; AD = d.$$

Dazu kommen dann als neue Sehnen $CH = d$, denn da der Winkel $ABD = CBH$ ist, so muss Bogen $\widehat{AD} = \widehat{CH}$, also Sehne $\overline{AD} = \overline{CH}$ sein; ferner $AH = c$, weil $\sphericalangle ABH = CBD$, also $\widehat{AH} = \widehat{CD}$, folglich $\overline{AH} = \overline{CD}$; ebenso $DG = b$, weil:

$$\sphericalangle DAG = BAC,\; \widehat{DG} = \widehat{BC},\; \overline{DG} = \overline{BC};$$

und endlich $BG = c$, weil:

$$\sphericalangle BAG = CAD,\; \widehat{BG} = \widehat{CD},\; \overline{BG} = \overline{CD}.$$

Hiernach nehmen obige Gleichungen folgende Gestalt an:

$$e \cdot BH = a \cdot d + b \cdot c \text{ und } AG \cdot f = a \cdot b + c \cdot d$$

Nun ist aber auch noch $BH = AG$, denn die zugehörigen Bogen $\widehat{BCH}$ und $\widehat{ADG}$ setzen sich zusammen aus den beiden zu den Seiten b und d gehörigen Bogenstücken $\widehat{BC} = \widehat{GD}$ u. $\widehat{CH} = \widehat{AD}$.

Folglich erhält man bei Division der beiden obigen Gleichungen unter Wegfall der gleichen Stücke $BH = AG$ die Formel:

$$\frac{e}{f} = \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

B) Eine zweite Beweisführung für die Richtigkeit dieser Formel erhält

Dagegen haben diese drei Sehnenvierecke keineswegs gleiche Gestalt, sind also nicht kongruent. Denn ausser den ungleichen Diagonalen e, f, g haben auch die Winkel nur zu je zweien gleiche Grösse und liegen auch in verschiedener Anordnung. Bezeichnet man nämlich für den Augenblick mit $(a)(b)(c)(d)$ den Bogen oder auch den Peripheriewinkel auf diesem Bogen, so ist die Reihenfolge der Seiten und Winkel in obigen drei Sehnenvierecken die folgende:

$$ABCD: a,\ (c)+(d)=\beta,\ b,\ (d)+(a)=\gamma,$$
$$c,\ (a)+(b)=\delta,\ d,\ (b)+(c)=\alpha,\ a;$$
$$ABGD: a,\ (b)+(d)=\varepsilon,\ c,\ (d)+(a)=\gamma,$$
$$b,\ (a)+(c)=\zeta,\ d,\ (c)+(b)=\alpha,\ a;$$
$$ABCH: a,\ (d)+(c)=\beta,\ b,\ (c)+(a)=\zeta,$$
$$d,\ (a)+(b)=\delta,\ c,\ (b)+(d)=\varepsilon,\ a.$$

Dabei:
$$\alpha+\gamma=\beta+\delta=\varepsilon+\zeta=180^0.$$

Erkl. 25. In den Abschnitten C 2 c und d des III. Teiles dieses Lehrbuches war nachgewiesen, dass das allgemeine Viereck fünf willkürliche Bestimmungsstücke habe, und in Antwort der Frage 80 des IV. Teiles dieses Lehrbuches wurde gezeigt, dass das Sehnenviereck deren vier habe. Es ist also aufzuklären, warum die obigen drei Sehnenvierecke trotz Uebereinstimmung der vier Seiten und des Radius zwar inhaltsgleich, aber nicht ähnlich, also nicht kongruent sind. Nun ist durch den Radius r und drei nach Grösse und Aufeinanderfolge gegebene Seiten (z. B. b, c, d in $ABCD$ oder c, b, d in $ABGD$ oder b, d, c in $ABCH$) die vierte Seite a jedesmal eindeutig festgelegt, also hat man nicht mehr von fünf, sondern nur von vier selbständigen Bestimmungsstücken zu sprechen. Und die übrigen Unterscheidungen sind eben veranlasst durch die verschiedene Aufeinanderfolge der Seiten.

Erkl. 26. Man wird aus der vorigen Betrachtung den Schluss ziehen können, dass Sehnenvierecke kongruent sind, wenn ihre vier Seiten nach Grösse und Aufeinanderfolge übereinstimmen, dass aber dreierlei Sehnenvierecke aus denselben vier Seiten konstruiert werden können, wenn jede beliebige Aufeinanderfolge dieser Seiten zugelassen wird. Denn nimmt man immer die Seite a als erste, so lassen sich die sechs Reihenfolgen bilden:

1) $abcd$ 3) $acbd$ 5) $adbc$
2) $abdc$ 4) $acdb$ 6) $adcb$.

Davon ist aber vorwärts bezw. rückwärts:

1) = 6), 2) = 4), 3) = 5).

Also enthalten die Figuren 7 und 8 auch alle möglichen aus denselben vier Seiten konstruierbaren Sehnenvierecke. Bemerkenswert bleibt aber, dass diese dreierlei Sehnenvierecke aus den vier Seiten a, b, c, d gleichen Radius und gleiche Fläche haben.

man durch die Aufstellung des Inhaltes des Sehnenvierecks $ABCD$ oder eines der beiden andern. Jedes derselben besteht nämlich aus zwei Dreiecken mit den Seiten abe und cde oder adf und bcf. Nun erhält man nach Antwort der Frage 57 des V. Teiles dieses Lehrbuches den Flächeninhalt eines Dreiecks, indem man das Produkt der drei Seiten dividiert durch den vierfachen Radius des Umkreises. Also erhält man für das Sehnenviereck jeweils die Summen:

$$\frac{abe}{4r}+\frac{cde}{4r}=\frac{adf}{4r}+\frac{bcf}{4r}.$$

Aus dieser Gleichung geht aber, da der Radius für alle Dreiecke derselbe ist, sofort die andere hervor:

$$e(ab+cd)=f(ad+bc),$$

also wie oben:

$$\frac{e}{f}=\frac{ad+bc}{ab+cd}.$$

Erkl. 27. Die Formel für den Dreiecksinhalt $F=\frac{abc}{4r}$ geht hervor aus der in Antwort der Frage 57 des V. Teiles dieses Lehrbuches bewiesenen Formel $r=\frac{abc}{4F}$. Die letztere wurde daselbst auf zwei Arten bewiesen:

Das rechtwinklige Dreieck aus der Seite $\frac{c}{2}$, der Mittelsenkrechten auf c und dem Radius r des umgeschriebenen Kreises in einem beliebigen Dreieck ABC hat an der Spitze O denselben Winkel γ wie das rechtwinklige Dreieck einer benachbarten Seite mit der Höhe auf die dritte Seite. Daher sind diese beiden rechtwinkligen Dreiecke ähnlich, und es gilt die Proportion:

$$\frac{c}{2}:r=h_a:b\ (=h_b:a)\ \text{oder}\ r=\frac{b\cdot c}{2h_a}.$$

Da nun $F=\frac{a\cdot h_a}{2}$ ist, so kann darin $2h_a=\frac{4F}{a}$ gesetzt werden, und man hat:

$$r=\frac{abc}{4F}\ \text{oder}\ F=\frac{abc}{4r}.$$

Eine andere Ableitung derselben Formel beruht auf der Beziehung:

$$r=\frac{1}{4}(\varrho_a+\varrho_b+\varrho_c-\varrho_o).$$

Setzt man darin für ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c, ϱ_o der Reihe nach:

$$\frac{F}{s-a},\ \frac{F}{s-b},\ \frac{F}{s-c},\ \frac{F}{s},$$

so entsteht nach einigen Umformungen (siehe Erkl. 137 des V. Teiles dieses Lehrbuches) wieder wie oben:

Erkl. 28. Die für den Inhalt des Sehnenvierecks entstehenden Formeln:

$$\frac{e}{4r}(ab + cd) \text{ oder } \frac{f}{4r}(ad + bc)$$

sind in dieser Form nicht von wesentlicher Bedeutung, weil darin je sechs Bestimmungsstücke auftreten, während dieser Inhalt sich aus den vier Bestimmungsstücken herstellen lassen muss. Dabei bleibt die Reihenfolge der Seiten ausser Betracht, da ja jedes der drei Sehnenvierecke den gleichen Flächeninhalt aufweist (vergl. Aufgabe 10 der Aufgabensammlung am Schlusse dieses Teiles).

$$r = \frac{abc}{4F} \text{ oder } F = \frac{abc}{4r}.$$

[Trigonometrisch ist nach dem Sinussatz

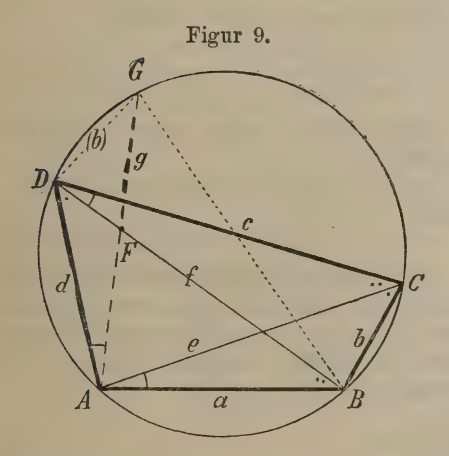
$$2r = \frac{c}{\sin\gamma}$$

und nach dem Flächensatz

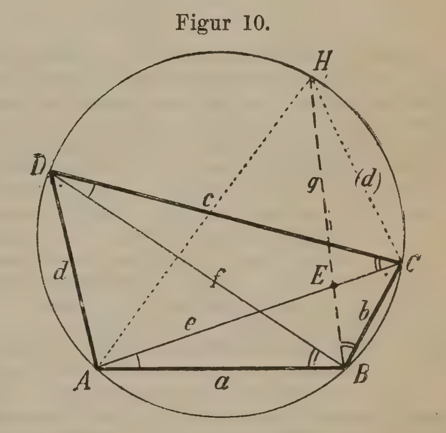
$$F = \frac{ab\cdot\sin\gamma}{2},$$

also durch Multiplikation:

$$2r\cdot F = \frac{abc}{2} \text{ od. } r = \frac{abc}{4F} \text{ und } F = \frac{abc}{4r}.]$$



Figur 9.



Figur 10.

Frage 9. Wie bestimmt man die Grösse jeder der Diagonalen aus den vier Seiten des Sehnenvierecks?

Antwort. A) Da man für das Produkt und für das Verhältnis der Diagonalen einen Ausdruck in den vier Seiten hat, so kann man auch die Diagonalen selbst bestimmen. Es ist nämlich

nach Antwort der Frage 7:

$$e\cdot f = ac + bd$$

nach Antwort der Frage 8:

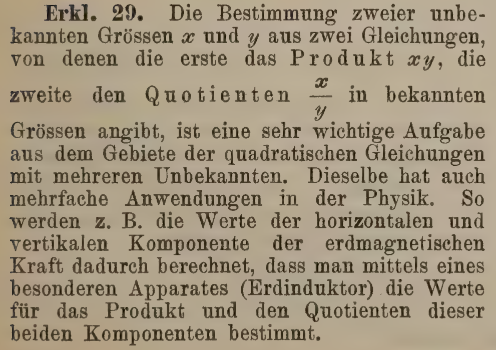
$$\frac{e}{f} = \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

Durch Multiplikation dieser beiden Gleichungen entsteht unter Wegfall von f:

$$e^2 = \frac{ad + bc}{ab + cd}(ac + bd)$$

also:

$$e = \sqrt{\frac{ad + bc}{ab + cd}(ac + bd)};$$


Erkl. 29. Die Bestimmung zweier unbekannten Grössen x und y aus zwei Gleichungen, von denen die erste das Produkt xy, die zweite den Quotienten $\frac{x}{y}$ in bekannten Grössen angibt, ist eine sehr wichtige Aufgabe aus dem Gebiete der quadratischen Gleichungen mit mehreren Unbekannten. Dieselbe hat auch mehrfache Anwendungen in der Physik. So werden z. B. die Werte der horizontalen und vertikalen Komponente der erdmagnetischen Kraft dadurch berechnet, dass man mittels eines besonderen Apparates (Erdinduktor) die Werte für das Produkt und den Quotienten dieser beiden Komponenten bestimmt.

Erkl. 30. In den beiden Formeln für e und f im Teil A der nebenstehenden Ausführung kommen die vier Seiten des Sehnenvierecks in den drei Grössenverbindungen vor: $ab + cd$, $ac + bd$ und $ad + bc$. Es ist bemerkenswert, dass das schon alle möglichen Umstellungen sind, in welchen die vier Grössen a, b, c, d nach einer solchen Anordnung in einer Summe je zweier Produkte überhaupt auftreten können. Umsomehr drängt sich von selbst die Frage auf, ob ausser den beiden Werten für e und f, worin zwei jener Summen als Nenner auftreten, nicht auch der dritte Ausdruck, nämlich mit der dritten Summe im Nenner, eine analoge Bedeutung hat. Und in der That zeigt die zweite der nebenstehenden Ableitungen (B), dass allerdings dieser dritte Wert ebenfalls auftritt, nämlich als Wert für die dritte Diagonale g.

Erkl. 31. Man kann daher das Ergebnis der Erkl. 26 dahin erweitern, dass in den drei Sehnenvierecken, welche aus denselben vier Seiten a, b, c, d gebildet werden können, nur dreierlei verschiedene Diagonalen auftreten, und dass deren Werte symmetrisch ausgedrückt werden in den vier Seiten. Denn aus dem Werte für e werden jene von f und g, indem man die Buchstaben $abcd$ jeweils verändert in $acbd$ bezw. $abdc$. Bei dieser Aenderung geht von den drei unter dem Wurzelzeichen stehenden Klammerausdrücken je einer in einen der andern über, sie behalten also den gleichen Wert ihres Produktes. Und die Nenner vor der Wurzel verschieben sich in der Art, dass immer die Produkte derjenigen zwei Seitenpaare addiert werden, welche bei Konstruktion des Vierecks mit der zu bestimmenden Diagonale auf derselben Seite dieser Diagonale bleiben.

Erkl. 32. Derartige Verschiebung der Buchstaben ist unter dem Namen „cyklische Vertauschung“ ein viel verwendbares Hilfsmittel der Mathematik. Man muss nur eine der Grössen wirklich bestimmen; und da sofort klar ist, dass die anderen auf genau gleichem Wege gefunden werden, so braucht man diesen Weg nicht noch einmal durchzumachen, sondern kann die neuen Werte oder neuen Sätze sofort anschreiben mit richtiger Vertauschung der Buchstaben (vergl. auch Erkl. 82 im V. Teile dieses Lehrbuches).

und durch Division derselben beiden Gleichungen entsteht unter Wegfall von e

$$f^2 = \frac{ab + cd}{ad + bc}(ac + bd)$$

also:

$$f = \sqrt{\frac{ab + cd}{ad + bc}(ac + bd)}.$$

B) Auch ohne Benutzung der Formel für $\frac{e}{f}$ erhält man auf anderem Wege die Werte von e und f zugleich mit dem Werte für die dritte Diagonale g durch Ansatz des Ptolemäischen Lehrsatzes für jedes der drei vorhandenen Sehnenvierecke.

Dieser Satz ergibt nämlich:

für $ABCD$: $e \cdot f = ac + bd$
für $ABGD$; $f \cdot g = ab + cd$
für $ABCH$: $g \cdot e = ad + bc$

Multiplikation aller drei Gleichungen ergibt:

$$e^2 f^2 g^2 = (ac + bd)(ab + cd)(ad + bc),$$

also:

$$efg = \sqrt{(ac + bd)(ab + cd)(ad + bc)}$$

Dividiert man diese letzte Gleichung der Reihe nach durch die zweite, dritte, erste der oben stehenden drei Gleichungen, so bleibt jedesmal nur eine Unbekannte übrig, nämlich:

$$\frac{efg}{fg} = e = \frac{1}{ab + cd}\sqrt{(ac + bd)(ab + cd)(ad + bc)}$$

$$\frac{efg}{eg} = f = \frac{1}{ad + bc}\sqrt{(ac + bd)(ab + cd)(ad + bc)}$$

$$\frac{efg}{ef} = g = \frac{1}{ac + bd}\sqrt{(ac + bd)(ab + cd)(ad + bc)}$$

Diese Werte für e und f sind aber dieselben wie oben, denn der vor dem Wurzelzeichen stehende Nenner kann in der zweiten Potenz als Nenner in die Wurzel gesetzt werden; und dann entsteht durch Kürzung wieder:

$$e = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}}, \quad f = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}},$$

und entsprechend:

$$g = \sqrt{\frac{(ab + cd)(ad + bc)}{ac + bd}}.$$

Erkl. 32 a. Ganz dasselbe zeigt sich auch bei dem in der zweiten Ableitung benutzten Gleichungssystem. Auch dieses ist ein spezieller Fall einer allgemeinen Gleichungsgruppe mit n Gleichungen für n Unbekannte $x, y, \cdots w$.

$$\left.\begin{array}{r} yz\cdots uvw = a \\ xz\cdots uvw = b \\ xy\cdots uvw = c \\ \cdots\cdots\cdots \\ xyz\cdots vw = g \\ xyz\cdots uw = h \\ xyz\cdots uv = k \end{array}\right\}$$

Daraus wird $x^{n-1}y^{n-1}z^{n-1}\cdots u^{n-1}v^{n-1}w^{n-1} = abc\cdots ghk$,

$$xyz\cdots uvw = \sqrt[n-1]{abc\cdots ghk} = W.$$

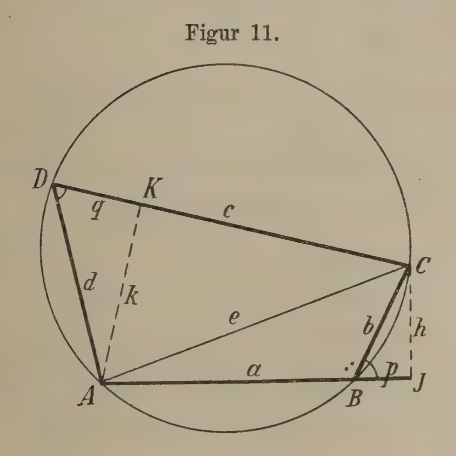
Also

$$x = \frac{1}{a}W,\ y = \frac{1}{b}W,\ z = \frac{1}{c}W,\ \cdots u = \frac{1}{g}W,$$

$$v = \frac{1}{h}W,\ w = \frac{1}{k}W.$$

Frage 10. Wie gross ist nach dem vorigen der Inhalt des Sehnenvierecks mit den vier Seiten a, b, c, d?

Figur 11.



Antwort. Da die drei Sehnenvierecke, welche man mit denselben vier Seiten a, b, c, d konstruieren kann, denselben Inhalt haben, so muss man eine in diesen vier Seiten symmetrische Inhaltsformel finden können.

Man zerlegt zu dem Zwecke das Sehnenviereck $ABCD$ in Fig. 11 durch die Diagonale e in zwei Dreiecke mit Grundseiten a und c und Höhen h und k. Dann ist die Fläche:

$$F = \frac{a\cdot h}{2} + \frac{c\cdot k}{2}$$

Und hierin sind nun die Grössen h und k durch Ausdrücke in den Seiten a, b, c, d zu ersetzen.

I. Um zunächst k durch h auszudrücken, beachte man die Aehnlichkeit der Dreiecke $BJC \sim DKA$. Denn ausser dem rechten Winkel ist auch $\sphericalangle CBJ = DAK$, nämlich beide supplementär zu $\sphericalangle ABC$: der erstere als Nebenwinkel, der letztere als gegenüberliegender Winkel des Sehnenvierecks. Aus jener Aehnlichkeit folgt aber:

$$BC : CJ : JB = DA : AK : KD$$

oder:

$$b : h : p = d : k : q,$$

folglich:

$$k = \frac{d}{b}\cdot h \text{ und } q = \frac{d}{b}\cdot p.$$

Setzt man diesen Wert für k in den obigen Ausdruck für F ein, so entsteht:

$$F = \frac{1}{2}\left(ah + \frac{cd}{b}h\right) = \frac{h}{2b}(ab + cd).$$

II. Nunmehr ist noch für h ein Ausdruck in a, b, c, d zu suchen; h ist aber als Höhe im Dreieck ABC auf Seite a

Erkl. 33. Nach dem am Schlusse von I nebenstehend erhaltenen Ausdruck ist:

$$F = \frac{h}{2b}(ab + cd),$$

also nach dem Ptolemäischen Satze:

$$F = \frac{h\cdot f\cdot g}{2b} = \frac{k\cdot f\cdot g}{2d}.$$

Ebenso entstehen, wenn h' und k' die Höhen von A auf b bezw. von C auf d sind, die Werte:

$$F = \frac{h'\cdot f\cdot g}{2a} = \frac{k'\cdot f\cdot g}{2c}$$

(trigonometrisch alle vier:

$$= \frac{1}{2}fg\sin\beta = \frac{1}{2}fg\sin\delta$$

oder auch:

$$= \frac{1}{2}eg\sin\alpha = \frac{1}{2}eg\sin\gamma$$

$$= \frac{1}{2}ef\sin\varepsilon = \frac{1}{2}ef\sin\zeta).$$

zu setzen gleich $\frac{2J}{a}$, wenn mit J der Inhalt dieses Dreiecks bezeichnet wird; also entsteht mit Benutzung der sog. „Heronischen Formel“ für J aus Antwort 46 des V. Teiles dieses Lehrbuches:

$$F = \frac{ab+cd}{2b} \cdot h = \frac{ab+cd}{ab} \cdot J = \frac{ab+cd}{4ab} \sqrt{(a+b+e)(a+b-e)(a-b+e)(-a+b+e)}$$

III. In dieser Formel ist jetzt noch der Wert von e nach $a\,b\,c\,d$ auszudrücken. Nun ist in dem eben erhaltenen Ausdruck:

$$4J = \sqrt{[(a+b)^2 - e^2]\,[e^2 - (a-b)^2]},$$

also wenn man den in Antwort der vorigen Frage gefundenen Wert

$$e^2 = \frac{ad+bc}{ab+cd}(ac+bd)$$

einsetzt und quadriert:

$$16J^2 = \left[(a+b)^2 - \frac{ad+bc}{ab+cd}(ac+bd)\right]\left[\frac{(ad+bc)}{ab+cd}(ac+bd) - (a-b)^2\right]$$

$$16J^2 = \frac{(a^2+2ab+b^2)(ab+cd) - (ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd} \cdot \frac{(ad+bc)(ac+bd) - (a^2-2ab+b^2)(ab+cd)}{ab+cd}$$

$$16J^2 = \frac{1}{(ab+cd)^2}[(a^2+2ab+b^2)ab + a^2cd + 2abcd + b^2cd - a^2cd - abc^2 - abd^2 - b^2cd)] \cdot [a^2cd + abc^2 + abd^2 + b^2cd - (a^2-2ab+b^2)ab - a^2cd + 2abcd - b^2cd]$$

$$16J^2 = \frac{1}{(ab+cd)^2}[(a^2+2ab+b^2)ab - ab(c^2-2cd+d^2)] \cdot [ab(c^2+2cd+d^2) - (a^2-2ab+b^2)ab]$$

$$16J^2 = \frac{a^2b^2}{(ab+cd)^2}[(a+b)^2 - (c-d)^2] \cdot [(c+d)^2 - (a-b)^2]$$

$$16J^2 = \frac{a^2b^2}{(ab+cd)^2}[(a+b)+(c-d)]\,[(a+b)-(c-d)] \cdot [(c+d)+(a-b)]\,[(c+d)-(a-b)]$$

$$4J = \frac{ab}{ab+cd}\sqrt{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}$$

IV. Setzt man diesen Wert oben am Schlusse von II ein, so wird:

$$F = \frac{ab+cd}{ab} \cdot J = \frac{ab+cd}{ab} \cdot \frac{ab}{4(ab+cd)} \cdot \sqrt{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}$$

Also:

$$F = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}$$

V. Setzt man hier noch zur Abkürzung:

$$a+b+c+d = 2s,$$

so wird:

$$\begin{aligned} a+b+c-d &= 2s-2d = 2(s-d)\\ a+b-c+d &= 2s-2c = 2(s-c)\\ a-b+c+d &= 2s-2b = 2(s-b)\\ -a+b+c+d &= 2s-2a = 2(s-a). \end{aligned}$$

Also: $F = \frac{1}{4}\sqrt{2(s-a)\,2(s-b)\,2(s-c)\,2(s-d)}$

oder: $\underline{F = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}$

Erkl. 34. Denselben Ausdruck für F, wie am Schlusse von II, erhält man auch durch Benutzung der Formeln in Erkl. 27 und 28:

$$F = \frac{e}{4r}(ab+cd).$$

Setzt man nämlich:

$$r = \frac{a\,b\,e}{4J},$$

wo J wieder den Inhalt des von den Seiten a, b, e gebildeten Dreiecks bedeutet, so folgt:

$$F = \frac{e(ab+cd)}{4} \cdot \frac{4J}{a\,b\,e} = \frac{ab+cd}{ab} \cdot J, \text{ wie nebenstehend.}$$

Erkl. 35. Auch die Berechnung in III kann mehrfach abgeändert werden. Drückt man nämlich h nach p statt nach J aus, so wird $h^2 = b^2 - p^2$. Und nun kann p wieder auf zwei Arten bestimmt werden. Entweder setzt man nach dem pythagoreischen Lehrsatze fürs stumpfwinklige Dreieck:

$$e^2 = a^2 + b^2 + 2ap,$$

also:

$$a^2 + b^2 + 2ap = \frac{ad+bc}{ab+cd}(ac+bd), \; 2ap = \frac{(ad+bc)(ac+bd) - (a^2+b^2)(ab+cd)}{ab+cd};$$

$$p = \frac{a^2cd + abc^2 + abd^2 + b^2cd - a^3b - ab^3 - a^2cd - b^2cd}{2a(ab+cd)},$$

$$p = \frac{ab(c^2+d^2-a^2-b^2)}{2a(ab+cd)} = \frac{b(c^2+d^2-a^2-b^2)}{2(ab+cd)}.$$

Erkl. 36. Derselbe Wert von p entsteht aber auch, wenn man den pythagoreischen Lehrsatz zweimal auf e anwendet, nämlich:

$$e^2 = a^2 + b^2 + 2ap = c^2 + d^2 - 2cq.$$

Weil also:

$$q = \frac{d}{b} \cdot p, \text{ so wird } c^2 + d^2 - a^2 - b^2 = 2ap + 2c \cdot \frac{dp}{b} = \frac{2p}{b}(ab+cd).$$

Folglich wieder:

$$p = \frac{b(c^2+d^2-a^2-b^2)}{2(ab+cd)}.$$

Erkl. 37. Bei der Einsetzung von p in die Formel $h^2 = b^2 - p^2$ kann man wieder auf zweierlei Art verfahren: Entweder setzt man vollständig ein und rechnet:

$$h^2 = b^2 - p^2 = b^2 - \frac{b^2(c^2+d^2-a^2-b^2)^2}{4(ab+cd)^2} = \frac{b^2}{4(ab+cd)^2}[4(ab+cd)^2 - (c^2+d^2-a^2-b^2)^2]$$

$$h^2 = \frac{b^2}{4(ab+cd)^2}[2(ab+cd) + (c^2+d^2-a^2-b^2)] \cdot [2(ab+cd) - (c^2+d^2-a^2-b^2)]$$

$$h^2 = \frac{b^2}{4(ab+cd)^2}[2ab - a^2 - b^2 + 2cd + c^2 + d^2] \cdot [2ab + a^2 + b^2 + 2cd - c^2 - d^2]$$

$$h^2 = \frac{b^2}{4(ab+cd)^2}[(c+d)^2 - (a-b)^2][(a+b)^2 - (c-d)^2]$$

$$h^2 = \frac{b^2}{4(ab+cd)^2}(c+d+a-b)(c+d-a+b)(a+b+c-d)(a+b-c+d)$$

$$h = \frac{b}{2(ab+cd)}\sqrt{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}.$$

Erkl. 38. Man kann aber auch sofort zerlegen $h^2 = b^2 - p^2 = (b+p)(b-p)$, also:

$$h^2 = \left[b + \frac{b(c^2+d^2-a^2-b^2)}{2(ab+cd)}\right] \cdot \left[b - \frac{b(c^2+d^2-a^2-b^2)}{2(ab+cd)}\right]$$

$$h^2 = \frac{2b(ab+cd) + b(c^2+d^2-a^2-b^2)}{2(ab+cd)} \cdot \frac{2b(ab+cd) - b(c^2+d^2-a^2-b^2)}{2(ab+cd)}$$

$$h^2 = \frac{b \cdot b}{4(ab+cd)^2}[2(ab+cd) + (c^2+d^2-a^2-b^2)] \cdot [2(ab+cd) - (c^2+d^2-a^2-b^2)].$$

Und sodann wieder weiter, wie zuvor in Erkl. 37.

Erkl. 39. Setzt man den so gefundenen Wert von h ein in die Formel am Schlusse von I, so erhält man:

$$F = \frac{ab+cd}{2b} \cdot h,$$

also:

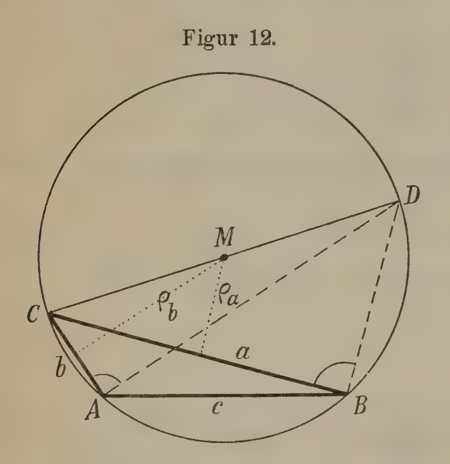
$$F = \frac{ab+cd}{2b} \cdot \frac{b}{2(ab+cd)} \sqrt{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}$$

$$F = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}, \text{ wie in IV.}$$

Und diese Formel ist völlig symmetrisch in a, b, c, d, gibt also dieselbe Flächengrösse, in welcher Anordnung auch die Seiten gewählt werden.

Frage 11. Welche Anwendung gestattet der Ptolemäische Lehrsatz auf das Dreieck in Verbindung mit seinem umgeschriebenen Kreise?

Figur 12.



Erkl. 40. Will man einen Ausdruck für die Seite b in Figur 12 ableiten, so benutzt man den Durchmesser der Ecke B und findet auf gleiche Weise:

$$b = \frac{a \cdot \sqrt{4r^2 - c^2} - c\sqrt{4r^2 - a^2}}{2r}$$

$$= \frac{a \cdot \varrho_c - c\varrho_a}{r}$$

Es steht also im Zähler stets als erstes Glied das Produkt der grösseren Seite mit dem grösseren Abstand, denn je kleiner die Sehne, desto grösser ihr Abstand vom Mittelpunkt.

Erkl. 41. Soll dagegen für die Seite a in Figur 12 oder 13 die Ableitung gemacht werden, so ist in der ptolemäischen Gleichung a selbst als Diagonale auf der linken Seite der Gleichung, und man erhält rechts eine Summe im Zähler des Bruches. Es entsteht nämlich:

$$a \cdot 2r = b \cdot \sqrt{2r^2 - c^2} + c\sqrt{2r^2 - b^2},$$

also:

$$a = \frac{b\sqrt{2r^2 - c^2} + c\sqrt{2r^2 - b^2}}{2r} = \frac{b\varrho_c + c\varrho_b}{r}.$$

Erkl. 42. Man erkennt sofort, dass eine Seite des Dreiecks stets dann zur Diagonale des Sehnenvierecks wird, wenn die anliegenden

Antwort. Mittels des Ptolemäischen Lehrsatzes kann man in jedem Dreieck eine Seite algebraisch ausdrücken durch die beiden andern Seiten und den Radius des dem Dreieck umgeschriebenen Kreises. Um nämlich im Dreieck ABC, Fig. 12, die Seite c durch a, b, r auszudrücken, zeichne man den Durchmesser der Gegenecke der zu bestimmenden Seite. Dann entsteht das Sehnenviereck $ABDC$, und man hat nach Ptolemäus:

$$AD \cdot BC = AC \cdot BD + AB \cdot CD.$$

Hierin ist aber:

$$BC = a, \quad AC = b, \quad AB = c, \quad CD = 2r,$$

und ferner wegen der rechten Winkel über dem Durchmesser CD bei A und B:

$$AD = \sqrt{CD^2 - AC^2} = \sqrt{4r^2 - b^2}$$

und ebenso

$$BD = \sqrt{4r^2 - a^2};$$

also wird oben:

$$a\sqrt{4r^2 - b^2} = b \cdot \sqrt{4r^2 - a^2} + c \cdot 2r$$

oder:

$$c = \frac{a\sqrt{4r^2 - b^2} - b\sqrt{4r^2 - a^2}}{2r}$$

Zieht man in den rechtwinkligen Dreiecken ACD und BCD die Mittelsenkrechten der Seiten a und b, und bezeichnet mit ϱ_a und ϱ_b die Abstände dieser Seiten vom Mittelpunkte des Kreises, so wird (unter Vermeidung der Wurzelgrössen):

$$AD = 2 \cdot \varrho_b, \quad BD = 2 \cdot \varrho_a,$$

also oben:

$$2\varrho_b \cdot a = b \cdot 2\varrho_a + c \cdot 2r,$$

oder nach Kürzung mit 2:

$$c = \frac{a \cdot \varrho_b - b\varrho_a}{r}.$$

In Figur 13 würde für Seite c auf demselben Wege die gleiche Formel ent-

Winkel beide spitz sind; nicht so dagegen eine Dreiecksseite, an deren einem oder anderm Eckpunkte ein stumpfer Winkel anliegt. Demnach könnte man das nebenstehende Ergebnis in Worte fassen zu folgender Aussage: Man findet den Wert einer Dreiecksseite mit **einem** (oder mit **zwei**) **spitzen anliegenden Winkeln**, indem man mit dem Radius des Umkreises dividiert in die **Differenz** (oder in die **Summe**) der beiden Produkte aus je einer Seite und dem Mittelpunktsabstand der andern Seite. In nebenstehender Ableitung ist der Fall mit der Differenz als Beispiel vorangestellt, weil gerade dieser später eine wichtige Anwendung liefern wird.

Erkl. 43. Eine eigentümliche Erscheinung bei der nebenstehend abgeleiteten Beziehung ist die Unveränderlichkeit des Ergebnisses bei Vertauschung der beiden Endpunkte des Durchmessers CD in Figur 12 oder AE in Figur 13. In der Gleichung:

$$AD \cdot a = b \cdot BD + c \cdot 2r$$

zu Figur 12 kann nämlich:

$$BD = 2\varrho_a,\ AD = 2\varrho_b$$

gesetzt werden, und dann hat man die Seiten a und b des Dreiecks ABC und deren Abstände von M. Man kann aber ebensowohl auch AD und BD als Seiten des Dreiecks ABD stehen lassen und dann a und b als die doppelten Abstände von M nach BD bezw. AD betrachten. Ebenso lautet für Figur 13 die ursprüngliche ptolemäische Gleichung:

$$a \cdot 2r = b \cdot e + c \cdot d;\ a = \frac{b \cdot e + c \cdot d}{2r}.$$

Und hierin ist:

$$b = 2 \cdot \varrho_d,\ c = 2 \cdot \varrho_e;\ d = 2 \cdot \varrho_b,\ e = 2 \cdot \varrho_c.$$

Also entweder:

$$a = \frac{b \cdot \varrho_c + c \cdot \varrho_b}{r}$$

für das Dreieck ABC, oder:

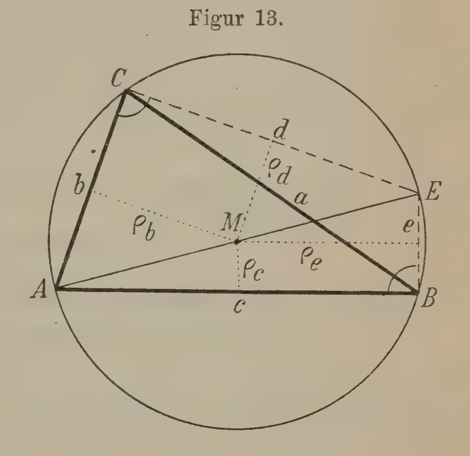
$$a = \frac{e \cdot \varrho_d + d \cdot \varrho_e}{r}$$

für das Dreieck BCE, indem jedesmal mit ϱ und einem der Indices $_b$, $_c$, $_d$, $_e$ der Abstand dieser Seite vom Mittelpunkt M angegeben wird.

stehen, nur mit Pluszeichen statt Minuszeichen im Zähler, nämlich:

$$c = \frac{a\varrho_b + b\varrho_a}{r} \text{ (vergl. Erkl 41).}$$

Figur 13.



Erkl. 44. Da Beziehungen zwischen den drei Seiten eines Dreiecks und dem Radius des Umkreises schon früher hergestellt waren, so muss auch aus den früheren Formeln sich die obige:

$$c = \frac{a\sqrt{4r^2 - b^2} \pm b\sqrt{4r^2 - a^2}}{2r}$$

schon ableiten lassen. Eine solche Formel ist die auch in Antwort der Frage 8 bereits angezogene: $F = \frac{abc}{4r}$. Hieraus entsteht nämlich:

$$r = \frac{abc}{4F} = \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(c-a+b)}}.$$

Folglich:

$$\frac{a^2b^2c^2}{r^2} = [(a+b)^2 - c^2] \cdot [c^2 - (a-b)^2];$$

also entwickelt:

$$\frac{a^2 b^2 c^2}{r^2} = -c^4 + c^2 [(a+b)^2 + (a-b)^2] - (a+b)^2 (a-b)^2.$$

Also:

$$c^4 - c^2 \left[2a^2 + 2b^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2}\right] + (a^2 - b^2)^2 = 0.$$

Und durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung nach c^2 entsteht:

$$c^2 = a^2 + b^2 - \frac{a^2 b^2}{2r^2} \pm \sqrt{a^4 + b^4 + \frac{a^4 b^4}{4r^4} + 2a^2b^2 - \frac{a^4 b^2}{r^2} - \frac{a^2 b^4}{r^2} - a^4 - b^4 + 2a^2b^2}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - \frac{a^2 b^2}{2r^2} \pm \frac{ab}{2r^2} \sqrt{a^2b^2 + 16r^4 - 4a^2r^2 - 4b^2r^2}.$$

Also mit Zerlegung von $-2a^2b^2$ in $-a^2b^2 - a^2b^2$:

$$c^2 = \frac{1}{4r^2}[4a^2r^2 - a^2b^2 + 4b^2r^2 - a^2b^2 \pm 2ab\sqrt{4r^2(4r^2 - a^2) - b^2(4r^2 - a^2)}]$$

$$c^2 = \frac{1}{4r^2}\left[a^2(4r^2 - b^2) + b^2(4r^2 - a^2) \pm 2ab\sqrt{(4r^2 - a^2)(4r^2 - b^2)}\right]$$

$$c^2 = \frac{1}{4r^2}\left[a\sqrt{4r^2 - b^2} \pm b\sqrt{4r^2 - a^2}\right]^2.$$

Folglich durch Radizierung wie oben:

$$c = \frac{a\sqrt{4r^2 - b^2} \pm b\sqrt{4r^2 - a^2}}{2r}.$$

Und hierin wäre das Vorzeichen der Quadratwurzel zu bestimmen nach der Lage der Winkel, wie in Erkl. 42 ausgeführt wurde.

---

2) Ueber die regelmässigen Vielecke oder die regulären Polygone und die Kreisteilung.

Frage 12. Welche Grössen kommen bei den regelmässigen Vielecken in Betracht, und welches ist die Hauptaufgabe?

Antwort. Bei einem regelmässigen Vieleck von n Ecken, also einem regulären n-Eck kommen in Betracht: der „grosse Radius“ r des umgeschriebenen Kreises, der „kleine Radius“ ϱ_n des eingeschriebenen Kreises, die Seite s_n des n-Ecks, sein Umfang u_n, seine Fläche f_n; sodann dieselben Elemente S_n, U_n, F_n des dem gleichen Kreise mit Radius r umgeschriebenen n-Ecks, dieselben Elemente s_{2n}, S_{2n} des ein- oder umgeschriebenen regelmässigen Vielecks von doppelter Seitenzahl, sowie umgekehrt dieselben Elemente:

$$s_{\frac{1}{2}n}, \quad S_{\frac{1}{2}n}$$

des ein- oder umgeschriebenen regelmässigen Vielecks von der halben Seitenzahl.

Der Centriwinkel zwischen den Radien aufeinanderfolgender Ecken ist $\frac{360^0}{n}$, zwischen r und ϱ gleich $\frac{180^0}{n}$.

Erkl. 45. Man wiederhole vor dem Studium dieses Abschnittes den Abschnitt A 6 b des IV. Teiles dieses Lehrbuches, woselbst „über die regelmässigen Vielecke“ die auf der unteren Stufe der Elementargeometrie zu erhaltenden Ergebnisse abgeleitet werden.

Erkl. 46. Als dasjenige Element, auf welches alle andern zurückgeführt werden, pflegt man meistens den grossen Radius des dem n-Eck umgeschriebenen Kreises zu wählen. Aber aus irgend welchen solchen Reduktionsgleichungen lässt sich selbstverständlich durch umgekehrte Auflösung auch jede andere Beziehung herstellen, z. B. kann man, wenn f_n und F_n nach r ausgedrückt sind, auch F_n aus f_n ableiten.

Die Hauptaufgabe besteht darin, zwischen allen diesen Elementen eine solche algebraische Beziehung herzustellen, dass aus einem einzigen willkürlich gewählten alle anderen abgeleitet werden können.

Frage 13. Welche Beziehung besteht in jedem regelmässigen Vieleck zwischen den Grössen r, ϱ, s, u, f?

Erkl. 47. Ist von einem Vieleck bekannt die Seite s und Radius ϱ, so findet man:

$$r = \sqrt{\varrho^2 + \frac{s^2}{4}};$$

ist bekannt r und ϱ, so ist:

$$s = 2\sqrt{r^2 - \varrho^2} = 2\sqrt{(r+\varrho)(r-\varrho)}.$$

Der am häufigsten vorkommende Fall ist aber der, dass r und s bekannt sind, wodurch:

$$\varrho = \sqrt{r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2};$$

denn meistens wird aus r zunächst s bestimmt und sodann ϱ hiernach ausgedrückt.

Erkl. 48. Sind s und r bekannt, so wird nach der Flächenformel zu schreiben sein:

$$\varrho = \frac{n\varrho \cdot s}{2} = \frac{n \cdot s}{2}\sqrt{r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2}$$

oder auch:

$$= \frac{ns}{4}\sqrt{4r^2 - s^2}.$$

Man vergl. Satz 8 im V. Teile dieses Lehrbuches über die Fläche des Tangentenvielseits.

Antwort. Da die Geraden r, ϱ, s ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten ϱ und $\frac{1}{2}s$ bilden, so rechnet man am einfachsten nach dem pythagoreischen Lehrsatz:

$$r^2 = \varrho^2 + \left(\frac{1}{2}s\right)^2, \quad r = \sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2},$$

also:

$$\varrho = \sqrt{r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2}, \quad s = 2\sqrt{r^2 - \varrho^2};$$

$$\underline{\varrho_n = \frac{r}{2}\sqrt{4 - \left(\frac{s_n}{r}\right)^2}}$$

Ferner ist ohne weiteres klar, dass beim regulären n-Eck

$$\underline{u = n \cdot s} \text{ und } \underline{f = \frac{n}{2} \cdot \varrho \cdot s = \frac{u \cdot \varrho}{2}},$$

denn das Vieleck zerfällt in n kongruente gleichschenklige Dreiecke mit Spitze im Mittelpunkt, Schenkel r, Grundseite s, Höhe ϱ, Inhalt $\frac{s \cdot \varrho}{2}$. Und die Summe der Grundseiten ist $n \cdot s$ oder der Umfang, die Summe der Inhalte $\frac{n \cdot s \cdot \varrho}{2}$ oder die Gesamtfläche des n-Ecks.

Frage 14. In welcher Beziehung steht die Seite S_n des umgeschriebenen n-Ecks zur Seite s^n des eingeschriebenen n-Ecks von gleicher Seitenzahl?

Erkl. 49. Man kann die nebenstehenden Ergebnisse in Worte fassen, indem man die Sätze aufstellt: Jedes Streckenelement des eingeschriebenen regelmässigen Vielecks steht zu dem entsprechenden Element des umgeschriebenen regelmässigen Vielecks in gleichem Verhältnis, nämlich wie $\varrho_n : r_n$ oder wie:

$$\sqrt{r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2} : r;$$

daher auch:

$$u_n : U_n = \varrho_n : r.$$

Antwort. Ist AD bezw. BE in Figur 14 oder 15 je eine Seite des eingeschriebenen bezw. umgeschriebenen n-Ecks, so bildet jede derselben mit dem Mittelpunkt M ein gleichschenkliges Dreieck mit einem Winkel an der Spitze gleich $\frac{360^0}{n}$, folglich ist $\triangle ADM \sim BEM$, oder auch deren Hälften $\triangle ACM \sim BDM$. Demnach ist:

$$AC : CM : MA = BD : DM : MB$$

oder:

$$\frac{1}{2}s_n : \varrho_n : r = \frac{1}{2}S_n : r : R$$

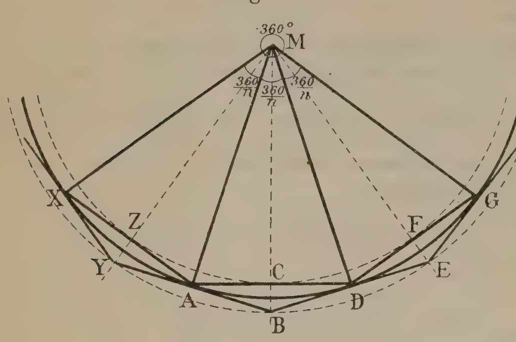
oder:

$$s_n : S_n = \varrho_n : r = r : R$$

Dagegen stehen entsprechende Flächenelemente der beiden Vielecke im Verhältnis der Quadrate je zweier entsprechenden Streckenelemente $\varrho_n^2 : r_n^2$; daher:

$$f_n : F_n = \frac{u_n \cdot \varrho_n}{U_n r} = \frac{\varrho_n}{r} \cdot \frac{\varrho_n}{r} = \frac{\varrho_n^2}{r^2}.$$

Figur 14.



Hieraus folgt zunächst:

$$S_n = \frac{r \cdot s_n}{\varrho_n} = \frac{r \cdot s_n}{\sqrt{r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}};$$

$$S_n = \frac{2 s_n}{\sqrt{4 - \left(\frac{s_n}{r}\right)^2}} = \frac{r s_n}{\varrho_n}.$$

Ferner findet man $r^2 = \varrho_n \cdot R$, indem mit R der grosse Radius $MB = ME$ des umgeschriebenen Vielecks bezeichnet wird. Ebenso ist auch:

$$U_n = n \cdot S_n = \frac{r \cdot u_n}{\varrho_n} = \frac{n \cdot r \cdot s_n}{\sqrt{r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}}$$

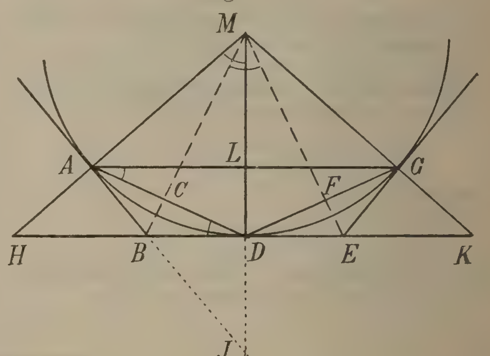
und

$$F_n = \frac{n r S_n}{2} = \frac{U_n \cdot r}{2}$$

$$= \frac{n \cdot r^2 \cdot s_n}{2 \varrho_n} = \left(\frac{\varrho_n}{2}\right)^2 \cdot f_n$$

Erkl. 50. Das Ergebnis $r^2 = \varrho_n \cdot R$ liefert den Satz: Der Radius eines Kreises mit einem eingeschriebenen und einem umgeschriebenen regelmässigen Vieleck der gleichen Seitenzahl ist das geometrische Mittel zwischen dem kleinen Radius des eingeschriebenen und dem grossen Radius des umgeschriebenen Vielecks. Denn dieser Radius r selbst ist gleichzeitig grosser Radius des eingeschriebenen und kleiner Radius des umgeschriebenen Vielecks.

Figur 15.



Frage 15. Wie erhält man umgekehrt die Elemente des eingeschriebenen regelmässigen n-Ecks aus jenen des umgeschriebenen n-Ecks von gleicher Seitenzahl?

Antwort. Löst man die Gleichung:

$$S_n = \frac{2 s_n}{\sqrt{4 - \left(\frac{s_n}{r}\right)^2}}$$

rückwärts nach s_n auf, so entsteht zunächst durch Quadrierung und Fortschaffung des Nenners:

$$S^2\left(4 - \frac{s^2}{r^2}\right) = 4 s^2, \text{ also } s^2\left(4 + \frac{S^2}{r^2}\right) = 4 S^2$$

$$\text{oder } s^2 = \frac{4 S^2}{4 + \frac{S^2}{r^2}} \quad \text{und} \quad s_n = \frac{2 S_n}{\sqrt{4 + \left(\frac{S_n}{r}\right)^2}}$$

Erkl. 51. Kennt man von einem regulären n-Eck zuerst die Seite s_n, so rechnet man nach voriger Formel S_n (z. B. beim Sechseck), kennt man aber zuerst S_n, so rechnet man nach nebenstehender Formel s_n (z. B. beim Viereck).

Erkl. 52. Da für das Vieleck mit Seite S der Kreis mit Radius r der eingeschriebene ist, so ist:

$$F_n = \frac{n \cdot r \cdot S_n}{2},$$

und durch Einsetzen dieses Ausdruckes entsteht die letzte der nebenstehenden Formeln.

Ebenso auch:

$$u_n = \frac{2\,U_n}{\sqrt{4+\left(\frac{S_n}{r}\right)^2}} = \frac{2\,n\,S_n}{\sqrt{4+\left(\frac{S_n}{r}\right)^2}}$$

Endlich noch:

$$f_n : F_n = \varrho_n^2 : r^2 = \left[r^2 - \left(\frac{1}{2}\,s_n\right)^2\right] : r^2$$

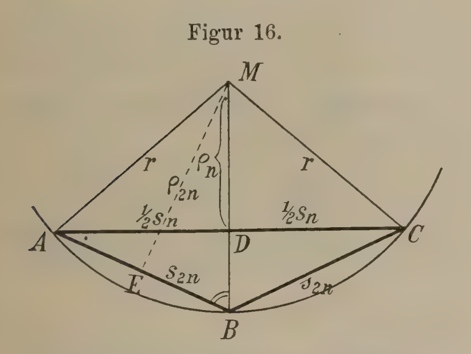
$$= \left(r^2 - \frac{S^2}{4+\frac{S^2}{r^2}}\right) : r^2 = \left(4+\frac{S^2}{r^2}-\frac{S^2}{r^2}\right) : \left(4+\frac{S^2}{r^2}\right) = 4 : \left[4+\left(\frac{S}{r}\right)^2\right]$$

also:

$$f_n = \frac{4\,F_n}{4+\left(\frac{S}{r}\right)^2} = \frac{2\,n\,r\,S_n}{4+\left(\frac{S_n}{r}\right)^2}$$

Frage 16. In welcher Beziehung steht die Seite s_{2n} des eingeschriebenen regelmässigen Vielecks von doppelter Seitenzahl zur Seite s_n des demselben Kreise eingeschriebenen regelmässigen Vielecks von einfacher Seitenzahl.

Figur 16.



Antwort. A. Ist in Figur 16 AC die Seite des eingeschriebenen regelmässigen n-Ecks, AB jene des $2n$-Ecks, so hat man in dem rechtwinkligen Dreieck ABD als Hypotenuse s_{2n}, als Katheten $\frac{1}{2}s_n$ und $BD = MB - MD = r - \varrho_n$, also zunächst:

$$s_{2n}^2 = \left(\frac{1}{2}\,s_n\right)^2 + (r-\varrho_n)^2.$$

Wird hierin noch der frühere Wert für ϱ eingesetzt, so ist s_{2n} nach s_n und r allein ausgedrückt. Nun ist:

$$\varrho^2 = r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2, \quad \varrho = \frac{r}{2}\sqrt{4-\left(\frac{s_n}{r}\right)^2},$$

also:

$$s_{2n}^2 = \left(\frac{s_n^2}{2}\right) + r^2 - 2\,r\,\varrho + \varrho^2$$

$$= \left(\frac{s_n}{2}\right)^2 + r^2 - 2\,r \cdot \frac{r}{2}\sqrt{4-\left(\frac{s_n}{r}\right)^2}$$

$$+ r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2 = 2\,r^2 - r^2\sqrt{4-\left(\frac{s_n}{r}\right)^2}.$$

Setzt man also r^2 vor eine Klammer, und radiziert, so kommt:

$$s_{2n} = r\sqrt{2-\sqrt{4-\left(\frac{s_n}{r}\right)^2}}.$$

Erkl. 53. In fortlaufender Reihenfolge dargestellt lautet die nebenstehende Ableitung folgendermassen:

$$s_{2n} = \sqrt{\left(\frac{s_n}{2}\right)^2 + \overline{BD}^2} = \sqrt{\left(\frac{s_n}{2}\right)^2 + (r-\varrho_n)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{s_n}{2}\right)^2 + r^2 - 2\,r \cdot \varrho + \varrho^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{s_n}{2}\right)^2 + r^2 - \frac{2\,r^2}{2}\sqrt{4-\left(\frac{s_n}{r}\right)^2} + r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{2\,r^2 - r^2\sqrt{4-\left(\frac{s_n}{r}\right)^2}}$$

$$= r\sqrt{2-\sqrt{4-\left(\frac{s_n}{r}\right)^2}}.$$

B. Kürzer kommt man zum gleichen Ergebnis, wenn man nach dem allgemeinen pythagoreischen Lehrsatz für die jedenfalls einem spitzen Winkel gegenüberliegende Seite AB im $\triangle\,AMB$ ansetzt:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 - 2 \cdot BM \cdot DM$$

Erkl. 54. Wird die Ausziehung der Wurzel oder das Vorsetzen vor eine Klammer mehr oder weniger weitergeführt, so erhält man statt

der nebenstehenden Formel die andern Ausdrücke:

$$s_{2n} = \sqrt{2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}\right)}$$

(Erkl. 583 in Kleyers Trigonometrie) oder:

$$s_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - s_n^2}}$$

(was durch den Wegfall aller Bruchstriche für Schrift und Druck bequemer ist, nicht aber für die Rechnung, wie sich später zeigen wird).

oder:

$$s_{2n}^2 = 2r^2 - 2\cdot r\varrho = 2r^2 - r^2\sqrt{4 - \left(\frac{s_n}{r}\right)^2},$$

wie schon oben.

Erkl. 55. Aus Nebenstehendem folgt:

$$u_{2n} = n\cdot s_{2n} = \frac{r\cdot u_n}{s_n}\sqrt{2 - \sqrt{4 - \left(\frac{s_n}{r}\right)^2}};$$

$$\varrho_{2n} = \frac{r}{2}\sqrt{4 - \left(\frac{s_{2n}^2}{r}\right)} = \frac{r}{2}\sqrt{4 - 2 + \sqrt{4 - \left(\frac{s_n}{r}\right)^2}} = \frac{r}{2}\sqrt{2 + \sqrt{4 - \left(\frac{s_n}{r}\right)^2}};$$

$$f_{2n} = \frac{2n}{2}\varrho_{2n}\,s_{2n} = n\cdot\frac{r^2}{2}\sqrt{\left[2 + \sqrt{4 - \left(\frac{s_n}{r}\right)^2}\right]\left[2 - \sqrt{4 - \left(\frac{s_n}{r}\right)^2}\right]}$$

$$= \frac{nr^2}{2}\sqrt{4 - 4 + \left(\frac{s_n}{r}\right)^2};$$

$$f_{2n} = \frac{nrs_n}{2} = \frac{u_n r}{2}.$$

Frage 17. Wie erhält man umgekehrt die Elemente des eingeschriebenen regelmässigen Vielecks von der halben Seitenzahl aus jenen des Vielecks von der ganzen Seitenzahl?

Antwort. A. Wenn man die Formel der vorigen Antwort:

$$s_{2n} = r\sqrt{2 - \sqrt{4 - \left(\frac{s_n}{r}\right)^2}}$$

rückwärts nach s_n auflöst, so erhält man einen Ausdruck von s_n nach s_{2n}, nämlich:

$$\left(\frac{s_{2n}}{r}\right)^2 = 2 - \sqrt{4 - \left(\frac{s_n}{r}\right)^2},$$

$$\left(\frac{s_{2n}}{r}\right)^2 - 2 = -\sqrt{4 - \left(\frac{s_n}{r}\right)^2};$$

quadriert:

$$\left[\left(\frac{s_{2n}}{r}\right)^2 - 2\right]^2 =$$

$$\left(\frac{s_{2n}}{r}\right)^4 - 4\left(\frac{s_{2n}}{r}\right)^2 + 4 = 4 - \left(\frac{s_n}{r}\right)^2$$

also:

$$\left(\frac{s_n}{r}\right)^2 = 4\left(\frac{s_{2n}}{r}\right)^2 - \left(\frac{s_{2n}}{r}\right)^4$$

$$= \left(\frac{s_{2n}}{r}\right)^2\left[4 - \left(\frac{s_{2n}}{r}\right)^2\right];$$

folglich:

$$\frac{s_n}{r} = \frac{s_{2n}}{r}\sqrt{4 - \left(\frac{s_{2n}}{r}\right)^2},$$

also:

$$s_n = s_{2n}\sqrt{4 - \left(\frac{s_{2n}}{r}\right)^2} = \frac{2s_{2n}\varrho_{2n}}{r}$$

Erkl. 56. Kennt man von einem regulären n-Eck zuerst s_{2n}, so rechnet man nach nebenstehender Formel s_n (z. B. Dreieck aus Sechseck, Fünfeck aus Zehneck); kennt man zuerst $s_{\frac{1}{2}n}$, so rechnet man nach der vorherigen Formel s_n (z. B. Zwölfeck aus Sechseck, Achteck aus Viereck). Die beiden Formeln können nämlich auch so aufgefasst werden, dass man schreibt:

$$s_n = r\sqrt{2 - \sqrt{4 - \left(\frac{s_{\frac{1}{2}n}}{r}\right)^2}}$$

und

$$s_{\frac{1}{2}n} = s_n\sqrt{4 - \left(\frac{s_n}{r}\right)^2}.$$

Erkl. 57. Hat man die nebenstehende Formel zuerst unabhängig aufgestellt, so findet man daraus umgekehrt die vorhergehende durch Auflösung einer quadratischen Gleichung nach s_{2n}:

$$\left(\frac{s_n}{s_{2n}}\right)^2 = 4 - \left(\frac{s_{2n}}{r}\right)^2;\quad s_n^2 \cdot r^2 = 4 s_{2n}^2 \cdot r^2 - s_{2n}^4;$$

$$s_{2n}^4 - 4r^2 \cdot s_{2n}^2 + s_n^2 \cdot r^2 = 0;$$

$$s_{2n}^2 = 2r^2 \pm \sqrt{4r^4 - s_n^2 r^2}$$

$$= 2r^2 \pm \sqrt{r^4\left(4 - \frac{s_n^2}{r^2}\right)}$$

$$= r^2\left[2 \pm \sqrt{4 - \left(\frac{s_n}{r}\right)^2}\right]$$

also:

$$s_{2n} = r\sqrt{2 - \sqrt{4 - \left(\frac{s_n}{r}\right)^2}}.$$

B. Will man dasselbe Ergebnis unabhängig von Antwort 16 ableiten, so kann man ausgehen von der Aehnlichkeit der Dreiecke $ABD \sim MBE$, in Figur 16, denn beide Dreiecke sind rechtwinklig und haben den gemeinsamen Winkel $ABD = MBE$. Demnach ist $AB : AD = MB : ME$, oder:

$$s_{2n} : \frac{1}{2} s_n = r : \varrho_{2n}.$$

Hieraus:

$$\frac{1}{2} s_n = \frac{s_{2n} \cdot \varrho_{2n}}{r} = \frac{s_{2n}}{r} \cdot \frac{r}{2}\sqrt{4 - \left(\frac{s_{2n}}{r}\right)^2},$$

also wie oben:

$$s_n = s_{2n}\sqrt{4 - \left(\frac{s_{2n}}{r}\right)^2}.$$

Frage 18. Wie findet man auf Grund der bisherigen Betrachtungen die Grössenbeziehungen bei den verschiedenen regelmässigen Vielecken?

Antwort. Bei denjenigen Vielecken, deren Seitenzahl eine Zurückführung auf andere Vielecke mit einfacherer Berechnung zulässt, benützt man die bisher abgeleiteten Formeln zur Ableitung ihrer Elemente aus denjenigen des ursprünglichen einfachsten Vielecks.

Bei den für die ursprüngliche Berechnung zugänglichen Vielecken berechnet man zunächst die Grösse des Centriwinkels zweier Radien nach aufeinanderfolgenden Eckpunkten, um sodann in diesem gleichschenkligen Dreieck auf Grund der bekannten Beziehungen zwischen Winkelgrössen und Seiten (vergl. Erkl. 18) die gesuchte Bestimmung vorzunehmen.

Erkl. 58. Die wenigen regelmässigen Vielecke, bei welchen eine ursprüngliche Bestimmung der Elemente möglich ist, sind das Sechseck, Viereck, Zehneck. Aus ersterem erhält man durch die Beziehung für $s_{\frac{1}{2}n}$ das Dreieck und durch s_{2n} die Reihe des Zwölfecks, Vierundzwanzigecks, Achtundvierzigecks u. s. f. Aus dem Viereck entsteht ebenso durch die Beziehung mit s_{2n} die Reihe des Achtecks, Sechzehnecks, Zweiunddreissigecks u. s. f. Aus dem Zehneck endlich wegen $s_{\frac{1}{2}n}$ das Fünfeck und wegen s_{2n} die Reihe des Zwanzigecks, Vierzigecks u. s. f. Allgemein können aus einer bekannten n-Eckseite abgeleitet werden die Seiten der Vielecke mit $2n$, $4n$, $8n$, .. $2^k \cdot n$ Ecken.

Frage 19. Welches sind die Elemente des regelmässigen **Sechsecks**?

Antwort. Beim regelmässigen Sechseck ist der Mittelpunktswinkel zweier benachbarter Radien (AMD in Figur 17) gleich $\frac{360^0}{6} = 60^0$, folglich ist das Dreieck AMD nicht nur gleichschenklig, sondern auch gleichseitig, also $AD = AM$,

$$s_6 = r.$$

Das regelmässige Sechseck wird also in den gegebenen Kreis konstruiert, indem man den Radius sechsmal als Sehne

Erkl. 59. Man kann selbstverständlich, sowie eine der nebenstehenden Beziehungen abgeleitet ist, die übrigen aus dieser entwickeln, ohne auf die früheren Formeln zurückzugreifen. So findet man an Figur 17 wo im Dreieck ACM:

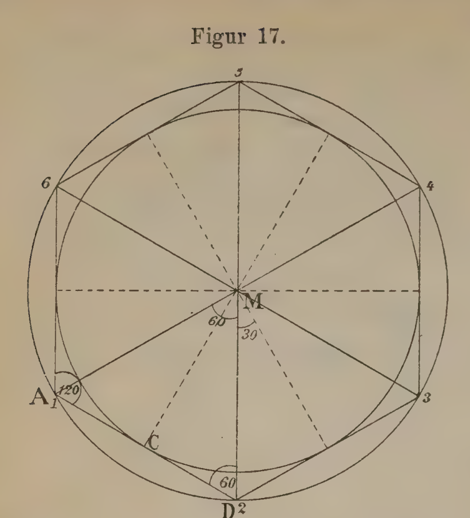
$$AC = \frac{s}{2} = \frac{r}{2},\quad AM = r$$

ist, unmittelbar:

$$CM = \varrho_6 = \sqrt{\overline{AM}^2 - \overline{AC}^2}$$

$$= \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \frac{r}{2}\sqrt{3}.$$

Figur 17.



Erkl. 60. Eine beachtenswerte Bestätigung der Inhaltsformel $\frac{3}{2}r^2\sqrt{3}$ erhält man durch Zerlegung des Sechsecks in die zwei Trapeze, wie sie durch die Ecken 12341 und 14561 begrenzt werden. Jedes hat als längere Grundseite den Durchmesser $2r$, als kürzere Grundseite $s = r$, als Höhe ϱ, also den Inhalt:

$$\frac{2r+r}{2}\cdot\varrho = \frac{3}{2}r\varrho = \frac{3}{2}r\cdot\frac{r}{2}\sqrt{3} = \frac{3}{4}r^2\sqrt{3}.$$

Folglich ist wieder die Fläche des Sechsecks das Doppelte, nämlich:

$$\frac{3r^2}{2}\sqrt{3}.$$

Erkl. 61. Das regelmässige Sechseck spielt eine wichtige Rolle in der Anwendung in Natur und Leben. Es tritt auf bei allerlei Geflechten und Netzen, in der Krystallographie, bei Pflanzenzellen, bei den Facettenaugen der Insekten, bei Flügelschuppen von Schmetterlingen, bei Bienenzellen u. s. f. Bei den letztgenannten bildet nämlich die Form des regelmässigen Sechsecks die Möglichkeit, mit der geringsten Menge von Wachs das Behältnis für die grösste Menge Honig herzustellen.

nacheinander einträgt. Daraus folgt nach Antwort 13:

$$\varrho_6 = \frac{r}{2}\sqrt{4-\left(\frac{s_6}{r}\right)^2} = \frac{r}{2}\sqrt{4-1} = \frac{r}{2}\sqrt{3}$$

$$\underline{\varrho_6 = \frac{r}{2}\sqrt{3}.}$$

Ferner:

$$\underline{u_6 = 6r}$$

und

$$f_6 = \frac{6}{2}\varrho_6\cdot r = 3\cdot\frac{r^2}{2}\sqrt{3},$$

also:

$$\underline{f_6 = \frac{3}{2}r^2\sqrt{3}.}$$

Endlich folgt aus Antwort 14 für das dem Kreise mit Radius r umgeschriebene Sechseck:

$$S_6 = \frac{2\cdot s_6}{\sqrt{4-\left(\frac{s_6}{r}\right)^2}} = \frac{2\cdot r}{\sqrt{4-1}} = \frac{2r}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2}{3}r\sqrt{3};\quad U_6 = 6\cdot S_6 = 4r\sqrt{3},$$

$$F_6 = \frac{r\cdot U_6}{2} = \frac{r\cdot 4r\sqrt{3}}{2} = 2r^2\sqrt{3};$$

also zusammen:

$$\underline{S_6 = \frac{2}{3}r\sqrt{3},\quad U_6 = 4r\sqrt{3},}$$

$$\underline{F_6 = 2r^2\sqrt{3}.}$$

Frage 20. Welches sind die Elemente des regelmässigen **Dreiecks**?

Antwort. Das regelmässige oder gleichseitige Dreieck wird in einen Kreis konstruiert, indem man erst die Ecken eines regelmässigen Sechsecks einträgt, und dann einen Punkt je mit dem zweitfolgenden Punkt unter Ueberspringung je einer Ecke des Sechsecks verbindet. Nach Antwort 17 ist sodann:

$$s_3 = s_6\sqrt{4-\left(\frac{s_6}{r}\right)^2} = r\sqrt{4-1} = r\sqrt{3},$$

$$\underline{s_3 = r\sqrt{3}}$$

Erkl. 62. Schon aus früheren Betrachtungen war bekannt, dass im gleichseitigen Dreieck mit Seite s die ganze Höhe $\frac{s}{2}\sqrt{3}$, deren oberer Abschnitt $\frac{2}{3}$ davon, also $\frac{s}{3}\sqrt{3}$, der untere Abschnitt $\frac{1}{3}$ davon, also $\frac{s}{6}\sqrt{3}$ sei. Da nun ersterer gleich dem Radius r des Umkreises,

letzterer gleich dem Radius ϱ des Inkreises ist, so folgt schon hieraus:

$$\varrho = \frac{r}{2} \text{ und } r = \frac{s}{3}\sqrt{3},$$

also umgekehrt:

$$s = \frac{3r}{\sqrt{3}} = r\sqrt{3}$$

und

$$\varrho = \frac{s\sqrt{3}}{6} = \frac{r\sqrt{3}\sqrt{3}}{6} = \frac{r}{2}.$$

Setzt man umgekehrt den Radius des eingeschriebenen Kreises gleich r, die Seite gleich S, so folgt:

$$r = \frac{S\sqrt{3}}{6}, \text{ also } S = \frac{6r}{\sqrt{3}} = 2r\sqrt{3}.$$

Sodann nach Antwort 13:

$$\varrho_3 = \frac{r}{2}\sqrt{4 - \left(\frac{s_3}{r}\right)^2} = \frac{r}{2}\sqrt{4-3} = \frac{r}{2},$$

$$u_3 = 3s_3 = 3r\sqrt{3},$$

$$f_3 = \frac{3}{2}\cdot\varrho_3\cdot s_3 = \frac{3}{2}\cdot\frac{r}{2}\cdot r\sqrt{3} = \frac{3r^2}{4}\sqrt{3},$$

also zusammen:

$$\varrho_3 = \frac{r}{2},\quad u_3 = 3r\sqrt{3},\quad f_3 = \frac{3}{4}r^2\sqrt{3}.$$

Ferner nach Antwort 14:

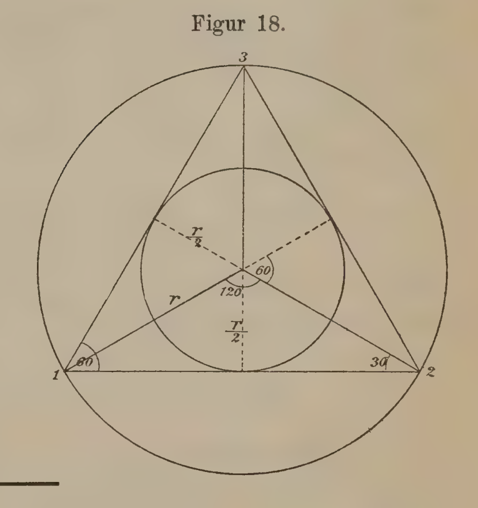
$$S_3 = \frac{r\cdot s_3}{\varrho_3} = \frac{r^2\sqrt{3}}{r/2} = 2r\sqrt{3};$$

$$U_3 = 3S_3,\quad F_3 = \frac{r}{2}\cdot U_3$$

also:

$$S_3 = 2r\sqrt{3},\quad U_3 = 6r\sqrt{3},\quad F_3 = 3r^2\sqrt{3}.$$

Figur 18.



Erkl. 63. Auch hier liefert die Höhe des ganzen Dreiecks:

$$h = r + \varrho = \frac{3}{2}r$$

eine Bestätigung der Inhaltsformel, nämlich:

$$f_3 = \frac{g\cdot h}{2} = \frac{s}{2}\cdot\frac{3}{2}r = \frac{3}{4}r^2\cdot\sqrt{3}$$

und

$$F_3 = \frac{S_3}{2}\cdot 3r = 3r^2\sqrt{3}.$$

Frage 21. Welches sind die Elemente des regelmässigen **Vierecks**?

Antwort. Das regelmässige Viereck oder das Quadrat wird in den Kreis konstruiert, indem man die Endpunkte zweier senkrecht aufeinander stehenden Durchmesser verbindet, denn der Centriwinkel zweier benachbarter Radien ist $\frac{360^0}{4} = 90^0$, die Vierecksseite ist Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten Radien sind. Folglich ist:

$$s_4^2 = r^2 + r^2,\quad s_4 = \sqrt{2r^2}$$

$$s_4 = r\sqrt{2}.$$

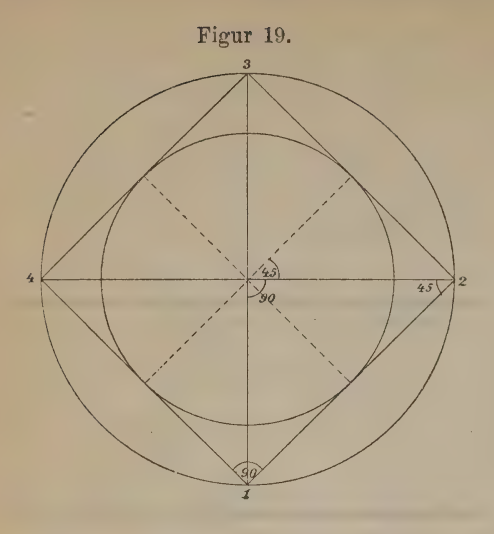
Erkl. 64. Schon früher wurde gefunden, dass wenn einem Quadrat mit Seite s ein Kreis umgeschrieben wird, dann dessen Durchmesser gleich der Diagonale $s\sqrt{2}$ sei, also:

$$2r = s\sqrt{2} \text{ und } s_4 = \frac{2r}{\sqrt{2}} = r\sqrt{2}.$$

Noch früher war es bekannt, dass wenn einem Quadrat mit Seite S ein Kreis eingeschrieben wird, dann dessen Durchmesser gleich der Seite S, also $S_4 = 2r$. — Beide Fälle bestätigen wieder die Flächenformeln, indem jedesmal der Quadratinhalt gleich:

$$s^2 = (r\sqrt{2})^2 = 2r^2 \text{ bezw. } S^2 = (2r)^2 = 4r^2.$$

Figur 19.



Sodann:

$$\varrho_4 = \frac{r}{2}\sqrt{4-\left(\frac{s_4}{r}\right)^2} = \frac{r}{2}\sqrt{4-2}$$
$$= \frac{r}{2}\sqrt{2},$$

$$f_4 = \frac{4}{2}\varrho_4 s_4 = 2\cdot\frac{r}{2}\sqrt{2}\cdot r\sqrt{2} = 2r^2,$$

$$\underline{\varrho_4 = \frac{r}{2}\sqrt{2},\quad u_4 = 4r\sqrt{2},\quad f_4 = 2r^2.}$$

Ferner:

$$S_4 = \frac{r s_4}{\varrho_4} = \frac{r^2\sqrt{2}}{r/2\sqrt{2}} = 2r,$$

$$F_4 = \frac{4r}{2}\cdot S_4 = 4r^2,$$

also:

$$\underline{S_4 = 2r,\quad U_4 = 8r,\quad F_4 = 4r^2.}$$

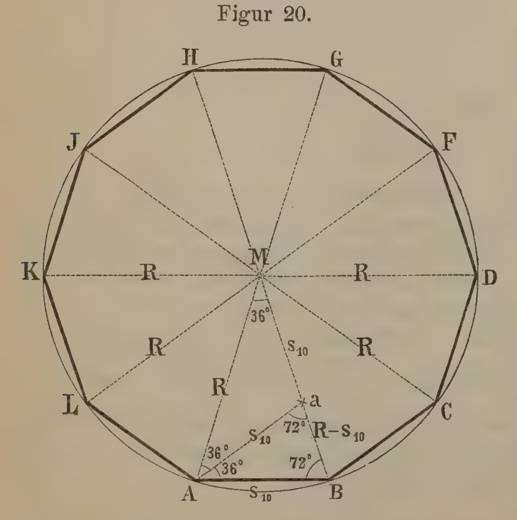
Erkl. 65. Man könnte beim Viereck die Ableitung auch so machen, dass man ausginge von dem bekannten Werte $S_4 = 2r$ und daraus rückwärts nach Frage 15 bestimmte:

$$s_4 = \frac{2S_4}{\sqrt{4+\left(\frac{S_4}{r}\right)^2}} = \frac{2\cdot 2r}{\sqrt{4+4}} = \frac{4r}{\sqrt{8}}$$

$$= \frac{4r}{2\sqrt{2}} = \frac{2r\sqrt{2}}{2} = r\sqrt{2}, \text{ wie oben.}$$

Frage 22. Wie wird das regelmässige Zehneck konstruiert?

Figur 20.



Antwort. Denkt man sich in einen Kreis ein regelmässiges Zehneck eingezeichnet, so muss der Centriwinkel AMB in Figur 20 ein Winkel von $\frac{360^0}{10} = 36^0$ sein. Für ein solches gleichschenkliges Dreieck muss aber nach Satz 2a die Grundseite s gleich dem grössern Abschnitte des nach dem goldenen Schnitte geteilten Schenkels r sein. Man erhält daher den Satz:

Satz 4. Die Seite des einem Kreis mit Radius r eingeschriebenen regelmässigen Zehnecks ist gleich dem goldenen Abschnitt des Radius.

Oder mit andern Worten:

Satz 4a. Die Seite des einem Kreis eingeschriebenen regulären Zehnecks ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen dem Radius und

Erkl. 66. Wird in der Figur 20 einer der Winkel an der Grundseite $AB = s_{10}$ halbiert, so wird das Stück der Halbierungsgeraden bis zum Schnittpunkt mit der Gegenseite ebenfalls gleich s_{10}, und auf der Gegenseite MB selbst entsteht ein oberer Abschnitt, der wieder die Länge s_{10} hat, während der untere Abschnitt gleich $r - s_{10}$ ist. Und infolge der Aehnlichkeit des abgeschnittenen unteren Teildreiecks mit dem ganzen gleichschenkligen Dreieck (wegen der drei gleichen Winkel 36⁰, 72⁰, 72⁰) besteht dieselbe Proportion zwischen Schenkel und Grundseite:

$$r : s_{10} = s_{10} : (r - s_{10}).$$

Erkl. 67. Der nebenstehende Satz 4 lässt auch folgende Ausdrucksweise zu:

Satz 4 b. Trägt man den grösseren Abschnitt des nach dem goldenen Schnitte geteilten Radius in fortlaufender Reihenfolge als Sehne in den Kreis ein, so fällt der Endpunkt der zehnten Sehne mit dem Anfangspunkt der ersten zusammen, und man erhält ein regelmässiges Zehneck.

Erkl. 68. Von allen Elementen der Fig. 21 sind zur wirklichen Konstruktion durchaus nicht alle notwendig. Man braucht vielmehr nur anzumerken den Punkt C, ein Kreisbögchen bei D und eine kurze Schnittstrecke bei D, und hat sofort AD im Zirkel. — E ist der „goldene Teilpunkt" der Strecke AM.

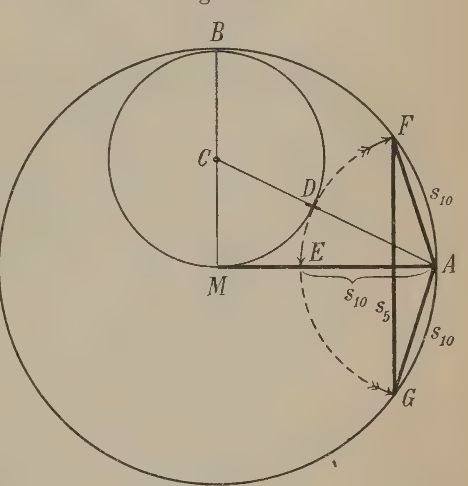
der Differenz des Radius und der Zehnecksseite.

Demnach geschieht die Konstruktion des regelmässigen Zehnecks in folgender Weise (Figur 21): Ueber einem von zwei senkrechten Radien errichtet man einen Halbkreis MDB, sucht den Schnittpunkt D mit der Verbindungsgeraden AC und trägt das Stück AD von A aus als Sehne im Kreis an. Dann ist gefunden:

$$AD = AE = AF = AG = s_{10}$$

(und gleichzeitig $FG = s_5$).

Figur 21.



Frage 23. Welches sind nunmehr die Elemente des regelmässigen Zehnecks?

Erkl. 69. Die zweite und zwar negative Lösung der quadratischen Gleichung:

$$s^2 + sr - r^2 = 0$$

wäre:

$$\frac{r}{2}(-1 - \sqrt{5}).$$

Die geometrische Bedeutung derselben geht hervor aus Betrachtung der Figur 5. Die beiden Längen:

$$\frac{r}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$$

geben nämlich an, wie weit vom Punkt A entfernt ein Teilpunkt der Strecke r liegt, welcher der allgemeinen Aufgabe des goldenen Schnittes entspricht. Entweder geht man um:

$$\frac{r}{2}(-1 + \sqrt{5})$$

Antwort. Um die Seite des regulären Zehnecks rechnend zu finden, bestimmt man die Unbekannte s aus der Gleichung des goldenen Schnittes:

$$r : s = s : (r - s)$$

Hieraus folgt:

$$s^2 = r^2 - rs, \quad s^2 + s \cdot r = r^2,$$

$$s^2 + sr + \frac{r^2}{4} = s^2 + 2 \cdot s \cdot \frac{r}{2} + \left(\frac{r}{2}\right)^2$$

$$= \left(s + \frac{r}{2}\right)^2 = r^2 + \frac{r^2}{4},$$

$$s + \frac{r}{2} = \sqrt{r^2 + \frac{r^2}{4}} = \sqrt{\frac{5r^2}{4}},$$

$$s = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{5r^2}{4}} = -\frac{r}{2} \pm \frac{r}{2}\sqrt{5}$$

$$= \frac{r}{2}(-1 \pm \sqrt{5}).$$

von A fort (und dies ist eine positive Grösse, bedeutet also die Richtung gegen den Endpunkt der Strecke vorwärts) und erreicht so den inneren Teilpunkt E. Oder man geht um:

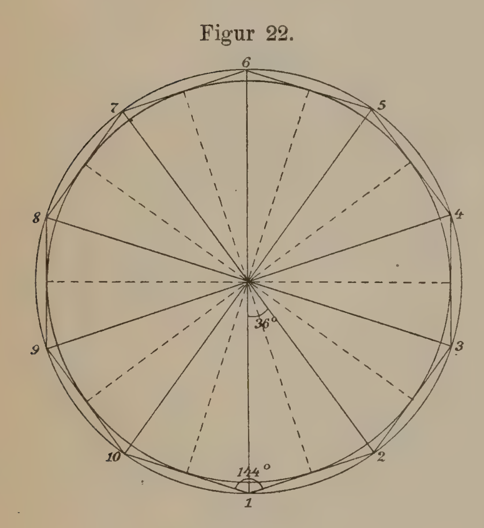
$$\frac{r}{2}(-1-\sqrt{5})$$

von A fort (und dies ist eine negative Grösse, bedeutet also die Richtung von A rückwärts), und dann erhält man den äusseren Teilpunkt F. Die Entfernung desselben von A (rückwärts, also negativ gemessen) beträgt (Figur 5):

$$AG + GF = x + a = \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1) + a$$

$$= \frac{a}{2}(\sqrt{5}+1).$$

Figur 22.



Erkl. 70. Um die Werte für f_{10} und S_{10} auszurechnen, muss man die Rechnungsvorschriften für das Wurzelrechnen in Anwendung bringen: „Eine vor dem Wurzelzeichen stehende Grösse wird unter das Wurzelzeichen gebracht, indem man ihr Quadrat als Faktor zum Radikanden setzt.“ Und die zweite: „Eine im Nenner eines Bruches stehende Wurzelgrösse der Form $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ wird in eine Wurzel mit rationalem Radikanden verwandelt durch Erweiterung des Bruches mit $\sqrt{a\mp\sqrt{b}}$.“

Da nun eine negative Grösse offenbar als Radius nicht verwendbar ist, so folgt:

$$s_{10} = \frac{r}{2}(-1+\sqrt{5}).$$

Hieraus folgt weiter:

$$\varrho_{10} = \frac{r}{2}\sqrt{4-\left(\frac{s_{10}}{r}\right)^2}$$

$$= \frac{r}{2}\sqrt{4-\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{r}{2}\sqrt{4-\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}}$$

$$= \frac{r}{2}\sqrt{\frac{16-(6-2\sqrt{5})}{4}}$$

$$= \frac{r}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}};$$

ferner:

$$u_{10} = 10\,s_{10},$$

$$f_{10} = 5\cdot\varrho_{10}\cdot s_{10}$$

$$= 5\cdot\frac{r}{2}\cdot\frac{r}{4}(-1+\sqrt{5})\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{5}{8}r^2\sqrt{(-1+\sqrt{5})^2(10+2\sqrt{5})}$$

$$= \frac{5}{8}r^2\sqrt{(6-2\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})}$$

$$= \frac{5}{8}r^2\sqrt{60-20\sqrt{5}+12\sqrt{5}-20}$$

$$= \frac{5}{8}r^2\sqrt{40-8\sqrt{5}}$$

$$= \frac{5}{8}r^2\sqrt{4(10-2\sqrt{5})}$$

$$= \frac{5\cdot 2}{8}r^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{5r^2}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} \quad \text{(vergl. Erkl. 70)}$$

Also zusammen:

$$\varrho_{10} = \frac{r}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}},$$

$$u_{10} = 5r(-1+\sqrt{5}),$$

$$f_{10} = \frac{5}{4}r^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

Endlich erhält man noch:

$$S_{10} = \frac{r\cdot s_{10}}{\varrho_{10}} = \frac{r\cdot r\cdot(-1+\sqrt{5})\cdot 4}{2r\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \frac{2r(-1+\sqrt{5})\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{(10+2\sqrt{5})(10-2\sqrt{5})}}$$

$$= \frac{2r\sqrt{(6-2\sqrt{5})(10-2\sqrt{5})}}{\sqrt{100-20}} = \frac{2r\sqrt{60-20\sqrt{5}-12\sqrt{5}+20}}{\sqrt{80}}$$

$$= \frac{2r\sqrt{80-32\sqrt{5}}}{4\sqrt{5}} = \frac{r\sqrt{16(5-2\sqrt{5})}\cdot\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}$$

$$= \frac{4r\sqrt{(5-2\sqrt{5})\cdot 5}}{2\cdot 5} = \frac{2r\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}.$$

$$U_{10} = 10\cdot S_{10}\,, \quad F_{10} = \frac{r}{2}\cdot U_{10}\,,$$

also zusammen:

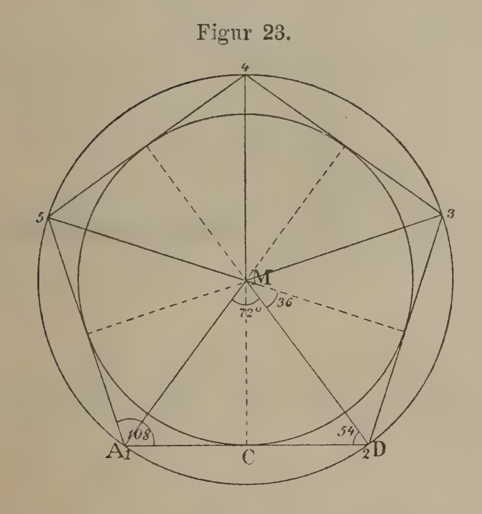
$$S_{10} = \frac{2}{5}r\sqrt{25-10\sqrt{5}},$$

$$U_{10} = 4r\sqrt{25-10\sqrt{5}},$$

$$F_{10} = 2r^2\sqrt{25-10\sqrt{5}}$$

Frage 24. Welches sind die Elemente des regelmässigen **Fünfecks?**

Figur 23.



Erkl. 71. Bei der wirklichen Zeichnung eines regulären Zehnecks oder Fünfecks oder sonstigen regulären Vielecks liegt infolge des grösseren oder kleineren Mangels an Genauigkeit der zur Zeichnung verwendeten Hilfsmittel (Lineal, Zirkel, Winkelscheit u. s. w.) immer die Notwendigkeit vor, neben der „Konstruktion" auch etwas „Probieren" nebenhergehen zu lassen. Man wird also die zehn bezw. fünf Sehnen des zu konstruierenden Vielecks erst probeweise eintragen, um zu sehen, ob wirklich der letzte Eckpunkt genau mit dem ersten zusammenfällt. Und falls das nicht ganz scharf zutrifft, wird man trotz richtiger Konstruktion doch etwas Ausgleichung eintreten lassen müssen.

Antwort. Das regelmässige Fünfeck wird in einen gegebenen Kreis konstruiert, indem man (vergl. Fig. 21 und 23) erst drei benachbarte Eckpunkte eines Zehnecks konstruiert, und dann die gefundene Fünfecksehne fünfmal nacheinander einträgt. Die Berechnung der Fünfeckseite geschieht nach Antwort der Frage 17 durch die Formel:

$$s_5 = s_{10}\sqrt{4-\left(\frac{s_{10}}{r}\right)^2} = \frac{2s_{10}\,\varrho_{10}}{r}$$

Nun ist dieses Produkt:

$$s_{10}\cdot\varrho_{10} = \frac{-1+\sqrt{5}}{8}\cdot r^2\cdot\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

schon in voriger Antwort für f_{10} berechnet worden:

$$= \frac{r^2}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

also folgt unmittelbar:

$$s_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

Hieraus ergibt sich sodann:

$$\varrho_5 = \frac{r}{2}\sqrt{4-\left(\frac{s_5}{r}\right)^2}$$

$$= \frac{r}{2}\sqrt{4-\left(\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{r}{2}\sqrt{\frac{16-(10-2\sqrt{5})}{4}}$$

$$= \frac{r}{4}\sqrt{6+2\sqrt{5}}\,;$$

ferner:

$$u_5 = 5\cdot s_5,$$

Erkl. 72. Dass die Berechnung des Produkts $s_{10}\cdot\varrho_{10}$ für s_5 nicht mehr neu durchgeführt zu werden braucht, nachdem f_{10} schon ausgerechnet vorliegt, geht schon hervor aus der in Erkl. 55 gefundenen Formel:

$$f_{2n} = \frac{n r s_n}{2}$$

also umgekehrt:

$$s_n = \frac{2 f_{2n}}{n\cdot r},$$

hier:

$$s_5 = \frac{2 f_{10}}{5r} = \frac{2}{5r}\cdot\frac{5}{4} r^2 \sqrt{10-2\sqrt{5}}$$
$$= \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} \text{ wie oben.}$$

$$f_5 = \frac{5}{2}\cdot\varrho_5\cdot s_5$$
$$= \frac{5}{2}\cdot\frac{r^2}{8}\sqrt{(10-2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}$$
$$= \frac{5r^2}{2\cdot 8}\sqrt{2\cdot 2(5-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}$$
$$= \frac{5r^2}{8}\sqrt{15-3\sqrt{5}+5\sqrt{5}-5}$$
$$= \frac{5r^2}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}};$$

also zusammen:

$$\underline{\varrho_5 = \frac{r}{4}\sqrt{6+2\sqrt{5}}}, \quad \underline{u_5 = \frac{5r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}},$$
$$\underline{f_5 = \frac{5r^2}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}.$$

Endlich entsteht noch:

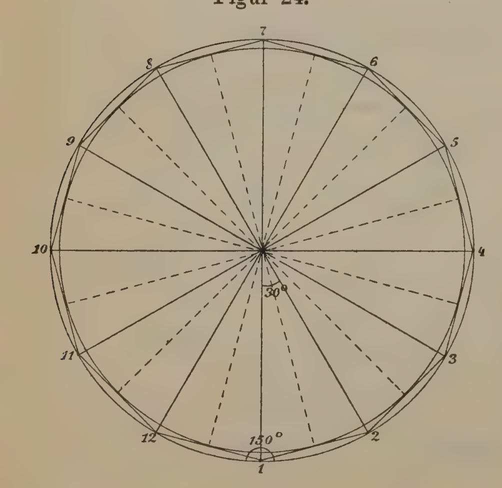
$$S_5 = \frac{r\cdot s_5}{\varrho_5} = \frac{r\cdot r}{2}\cdot\frac{4}{r}\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}}} = 2r\sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}}$$
$$= 2r\sqrt{\frac{15-3\sqrt{5}-5\sqrt{5}+5}{9-5}} = 2r\sqrt{\frac{20-8\sqrt{5}}{4}} = 2r\sqrt{5-2\sqrt{5}},$$
$$U_5 = 5\cdot S_5, \qquad F_5 = \frac{r}{2}\cdot U_5;$$

also zusammen:

$$\underline{S_5 = 2r\sqrt{5-2\sqrt{5}}}, \quad \underline{U_5 = 10r\sqrt{5-2\sqrt{5}}}, \quad \underline{F_5 = 5r^2\sqrt{5-2\sqrt{5}}}.$$

Frage 25. Für welche regelmässigen Vielecke ergeben sich die Elemente aus jenen des regulären Sechsecks?

Figur 24.



Antwort. Aus den Elementen des regulären Sechsecks ergeben sich nach der Formel:

$$s_{2n} = r\sqrt{2-\sqrt{4-\left(\frac{s_n}{r}\right)^2}}$$

die Elemente aller derjenigen regelmässigen Vielecke, deren Eckenzahl der Reihe nach durch Verdoppelung aus der des Sechsecks hervorgeht, also zunächst s_{12}, hieraus s_{24}, dann s_{48}, s_{96} u. s. w., allgemein $s_{3\cdot 2^k}$. Man erhält so zunächst:

$$s_{12} = r\sqrt{2-\sqrt{4-\left(\frac{s_6}{r}\right)^2}}$$
$$= r\sqrt{2-\sqrt{4-1}} = r\sqrt{2-\sqrt{3}},$$

$$\varrho_{12} = r\sqrt{4-\left(\frac{s_{12}}{r}\right)^2}$$
$$= \frac{r}{2}\sqrt{4-(2-\sqrt{3})} = \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}},$$

Erkl. 73. Schon in einzelnen Fällen der bisherigen Ausführungen, ganz besonders aber bei den nebenstehenden Berechnungen zeigt sich, dass die Schreibweise:

$$r\sqrt{2-\sqrt{4-\left(\frac{s_n}{r}\right)^2}}$$

die vorteilhafteste für s_{2n} war. Denn jedes s_n wird ausgedrückt in einem Produkt aus r und einem Zahlenfaktor [so z. B. $s_6 = 1\cdot r$, $s_4 = r\cdot\sqrt{2}$, $s_{10} = r/2\cdot(\sqrt{5}-1)$ u. s. w.] Folglich ist der Bruch $\frac{s_n}{r}$ wieder eine reine Zahlengrösse, und die ganze Wurzel:

$$\sqrt{2-\sqrt{4-\left(\frac{s_n}{r}\right)^2}}$$

ist ebenfalls eine solche. Also entsteht durch die Benützung obiger Formel für s_{2n} sofort wieder ein Ausdruck in Gestalt eines Produkts aus r und einem Zahlenfaktor.

Erkl. 74. Wählt man eine der anderen Formeln für s_{2n} in Erkl. 54, so kommt natürlich als Endergebnis der Ausrechnung derselbe Wert für s_{2n}, jedoch mit mehr Einzeloperationen, z. B. Vorklammersetzen von r^2 u. s. w. Nach der sog. Prüfung der Dimensionen (vgl. Frage 84 u. ff. im V. Teile) ist in dem Ausdruck:

$$\sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - s_n^2}}$$

der Radikand der inneren Wurzel eine Fläche, deren Wurzel eine Länge, deren Produkt mit r wieder eine Fläche, der ganze Radikand der grossen Wurzel also eine Fläche, die Wurzel selbst eine Länge $= s_{2n}$.

$$f_{12} = \frac{12}{2}\cdot\varrho_{12}\cdot s_{12}$$
$$= 6\cdot\frac{r^2}{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}\,\sqrt{2-\sqrt{3}}$$
$$= 3r^2\cdot\sqrt{4-3} = 3r^2.$$

Endlich:

$$S_{12} = \frac{r\cdot s_{12}}{\varrho_{12}} = 2r\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$$
$$= 2r\sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}}$$
$$= 2r(2-\sqrt{3}) = 2r\sqrt{7-4\sqrt{3}},$$

$$F_{12} = \frac{12\cdot r}{2}\cdot S_{12} = 12r^2\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$$
$$= 12r^2(2-\sqrt{3}) = 12r^2\sqrt{7-4\sqrt{3}}.$$

Also zusammen:

$$\underline{s_{12} = r\sqrt{2-\sqrt{3}},}$$

$$\underline{\varrho_{12} = \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}},} \qquad \underline{f_{12} = 3r^2,}$$

$$\underline{S_{12} = 2r(2-\sqrt{3}),} \qquad \underline{F_{12} = 12r^2(2-\sqrt{3}).}$$

Frage 26. Welches sind die Elemente der regelmässigen Vielecke von 24, 48 u. s. w. Ecken?

Erkl. 75. Die Konstruktion der regelmässigen Vielecke von 24, 48 $\cdots 3\cdot 2^k$ Seiten geht aus der des Sechsecks hervor durch fortgesetztes Halbieren der Centriwinkel, wie solches schon in Antwort der Frage 103 des IV. Teiles dieses Lehrbuches angegeben wurde.

Erkl. 76. Für die ziffernmässige Ausrechnung der nebenstehenden Ausdrücke ist ein besonderer Umstand zu beachten wegen der Aufeinanderfolge ineinander geschobener Quadratwurzeln: Um eine Quadratwurzel auf g Stellen ausführlich zu rechnen, muss man den Radikanden auf $2\cdot g$ Stellen kennen, da je 2 Stellen des Radikanden nur eine Stelle der Wurzel liefern. Soll also z. B.:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

gerechnet werden auf g Stellen, so müsste die

Antwort. Aus der in voriger Antwort gefundenen Formel für:

$$s_{12} = r\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

ergibt sich sofort:

$$s_{24} = r\sqrt{2-\sqrt{4-\left(\frac{s_{12}}{r}\right)^2}}$$
$$= r\sqrt{2-\sqrt{4-(2-\sqrt{3})}}$$
$$= r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}},$$

$$s_{48} = r\sqrt{2-\sqrt{4-\left(\frac{s_{24}}{r}\right)^2}}$$
$$= r\sqrt{2-\sqrt{4-(2-\sqrt{2+\sqrt{3}})}}$$
$$= r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}},$$

darin enthaltene $\sqrt{3}$ auf $2\cdot g$ Stellen gerechnet sein. Um aber:

$$\sqrt{2\pm\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

auf g Stellen zu rechnen, müsste schon der soeben genannte Ausdruck:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

auf $2g$ Stellen, also $\sqrt{3}$ auf $4g$ Stellen gerechnet sein. Und so müsste für die ausführliche Rechnung des Ausdrucks $s_{3\cdot 2^z}$ die darin enthaltene $\sqrt{3}$ auf $2^z\cdot g$ Stellen gerechnet sein.

$$s_{96} = r\sqrt{2-\sqrt{4-\left(\frac{s_{48}}{r}\right)^2}}$$
$$= r\sqrt{2-\sqrt{4-\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)}}$$
$$= r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$$

Ohne die Rechnung im einzelnen weiter durchzuführen, erkennt man, dass jedesmal der Posten:

$$4-(2-\sqrt{\cdots}) = 2+\sqrt{\cdots}$$

unter dem zweiten Wurzelzeichen auftritt; und so kann man nunmehr unmittelbar anschreiben:

$$s_{192} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}$$

oder anders geschrieben:

$$s_{192} = r\sqrt{\underset{1}{[2}-\sqrt{\underset{2}{(2}+\sqrt{\underset{3}{[2}+\sqrt{\underset{4}{(2}+\sqrt{\underset{5}{2}+\sqrt{\underset{6}{3}}})]})]}} \cdots\cdots\cdots (192 = 3\cdot 2^6)$$

$$s_{384} = r\sqrt{\underset{1}{[2}-\sqrt{\underset{2}{(2}+\sqrt{\underset{3}{[2}+\sqrt{\underset{4}{(2}+\sqrt{\underset{5}{\{2}+\sqrt{\underset{6}{2}+\sqrt{\underset{7}{3}}}\})]})]}} \cdots (384 = 3\cdot 2^7)$$

Sogar allgemein könnte man anschreiben für ein Vieleck von $3\cdot 2^z$ Ecken:

$$s_{3\cdot 2^z} = r\sqrt{\underset{1}{[2}-\sqrt{\underset{2}{(2}+\sqrt{\underset{3}{[2}+\cdots\sqrt{\underset{z-3}{(2}+\sqrt{\underset{z-2}{\{2}+\sqrt{\underset{z-1}{2}+\sqrt{\underset{z}{3}}}\})\cdots]}})]}$$

Ebenso findet man eine leicht übersehbare Reihe für die ϱ, nämlich:

$$\varrho_{24} = \frac{r}{2}\sqrt{4-\left(\frac{s_{24}}{r}\right)^2} = \frac{r}{2}\sqrt{4-\left(2-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)} = \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

$$\varrho_{48} = \frac{r}{2}\sqrt{4-\left(\frac{s_{48}}{r}\right)^2} = \frac{r}{2}\sqrt{4-\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)} = \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

$$\varrho_{96} = \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}} = \frac{r}{2}\sqrt{\underset{1}{[2}+\sqrt{\underset{2}{(2}+\sqrt{\underset{3}{[2}+\sqrt{\underset{4}{2}+\sqrt{\underset{5}{3}}}]})]}}$$

Man erkennt sofort wieder die Analogie für die Reihe ϱ:

$$\varrho_{192} = \frac{r}{2}\sqrt{\underset{1}{[2}+\sqrt{\underset{2}{(2}+\sqrt{\underset{3}{[2}+\sqrt{\underset{4}{(2}+\sqrt{\underset{5}{2}+\sqrt{\underset{6}{3}}})]})]}} \cdots\cdots\cdots (192 = 3\cdot 2^6)$$

$$\varrho_{384} = \frac{r}{2}\sqrt{\underset{1}{[2}+\sqrt{\underset{2}{(2}+\sqrt{\underset{3}{[2}+\sqrt{\underset{4}{(2}+\sqrt{\underset{5}{\{2}+\sqrt{\underset{6}{2}+\sqrt{\underset{7}{3}}}\})]})]}} \cdots (384 = 3\cdot 2^7)$$

$$\varrho_{3\cdot 2^z} = \sqrt{\underset{1}{[2}+\sqrt{\underset{2}{(2}+\sqrt{\underset{3}{[2}+\cdots\sqrt{\underset{z-3}{(2}+\sqrt{\underset{z-2}{\{2}+\sqrt{\underset{z-1}{2}+\sqrt{\underset{z}{3}}}\})\cdots]}})]}$$

Endlich entsteht für f nach der Formel:

$$f = \frac{n}{2}\varrho\cdot s$$

$$f_{24} = 12\cdot\varrho_{24}s_{24} = 12\cdot\frac{r^2}{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}} = 6r^2\sqrt{(2+\sqrt{\;})(2-\sqrt{\;})}$$
$$= 6r^2\sqrt{4-(\sqrt{\;})^2} = 6r^2\sqrt{4-(2+\sqrt{3})} = 6r^2\sqrt{2-\sqrt{3}},$$

$$f_{48} = \frac{48}{2}\cdot\frac{r^2}{2}\sqrt{(2+\sqrt{\;})(2-\sqrt{\;})} = \frac{48}{4}r^2\sqrt{4-(2+\sqrt{2+\sqrt{3}})} = 12r^2\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}.$$

Ebenso weiter und allgemein:

$$f_{96} = \frac{96}{4} r^2 \sqrt{4 - \left(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}\right)} = 24 r^2 \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$$

$$f_{192} = 48 r^2 \sqrt{\left[\underset{1}{2} - \sqrt{\left(\underset{2}{2} + \sqrt{\left(\underset{3}{2} + \sqrt{\underset{4}{2} + \sqrt{\underset{5}{3}}}\right)}\right)}\right]} \cdots\cdots\cdots (192 = 3 \cdot 2^6)$$

$$f_{384} = 96 r^2 \sqrt{\left[\underset{1}{2} - \sqrt{\left(\underset{2}{2} + \sqrt{\left[\underset{3}{2} + \sqrt{\left(\underset{4}{2} + \sqrt{\underset{5}{2} + \sqrt{\underset{6}{3}}}\right)}\right]}\right)}\right]} \cdots\cdots\cdots (384 = 3 \cdot 2^7)$$

$$f_{3 \cdot 2^z} = 3 \cdot 2^{z-2} r^2 \sqrt{\left[\underset{1}{2} - \sqrt{\left(\underset{2}{2} + \sqrt{\left[\underset{3}{2} + \cdots \sqrt{\left(\underset{z-4}{2} + \sqrt{\left\{\underset{z-3}{2} + \sqrt{\underset{z-2}{2} + \sqrt{\underset{z-1}{3}}}\right\}}\right)} \cdots\right]}\right)}\right]}$$

Auch für S und F erhält man nach den Formeln:

$$S_n = \frac{r s_n}{\varrho_n} \quad \text{und} \quad F_n = \frac{n}{2} r S_n$$

$$S_{24} = 2r \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$$

$$F_{24} = 24 r^2 \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$$

$$S_{48} = 2r \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}$$

$$F_{48} = 48 r^2 \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}$$

$$S_{96} = 2r \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}}$$

$$F_{96} = 96 r^2 \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}}$$

u. s. w.

Erkl. 77. Durch Anwendung der „abgekürzten" Methode des Quadratwurzelziehens kann die vorige Anforderung zwar um einen bedeutenden Teil gemindert werden, aber immerhin bliebe das ziffernmässige Bestimmen der Vielecksseiten mit hoher Eckenzahl ohne Benützung anderer Hilfsmittel als der nebenstehend abgeleiteten Formeln eine ausserordentlich zeitraubende und mühevolle Arbeit. Die Berechnung von s_{24} auf 3 Stellen wäre z. B. die folgende, nach ausführlicher und nach abgekürzter Methode nebeneinander:

$\sqrt{3} = 1{,}732050807569$
$200 : 2_7$
$1100 : 34_3$
$7100 : 346_2$
$17600 : 3464$
$1760000 : 34640_5$
$2797500 : 346410$
$279750000 : 3464100_8$
$262193600 : 3464101_6$
$26219360000 : 346410160_7$
$197064875100 : 3464101614_5$
$2385979437500 : 34641016150_6$
$30751846846400 : 346410161512$

$\sqrt{3} = 1{,}7321$
$200 : 2_7$
$1100 : 34_3$
$71 : 34{,}6$
$2 : 3{,}5$

$\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{3{,}732050807569} = 1{,}931852$
$273 : 2_9$
$1220 : 38_3$
$7150 : 386_1$
$328980 : 3862_8$
$1995675 : 38636_5$
$6385069 : 386370$

$\sqrt{3{,}7321} = 1{,}9319$
$273 : 2_9$
$1221 : 38_3$
$72 : 38{,}6$
$33 : 3{,}9$

$\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \sqrt{0{,}068148} = 0{,}261$
$281 : 4_6$
$548 : 52$

$\sqrt{0{,}0681} = 0{,}261$
$281 : 4_6$
$5 : 5{,}2$

also:

$$s_{24} = r \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}} = 0{,}261 r$$

Genau auf 7 Stellen ist:

$$s_{24} = 0{,}2610524 \cdot r.$$

Erkl. 78. Die Reihe für f hätte man auch aus der Formel in Erkl. 55 entnehmen können, wonach $f_{2n} = \frac{n}{2} r s_n$. Daraus sieht man, dass jedes f in den obenstehenden Ableitungen denselben Wurzelausdruck enthalten muss, wie das s mit der halben Eckenzahl, und zwar multipliziert mit $\frac{n}{2} \cdot r$. In der That ist obenstehend:

$f_{24} = \frac{12}{2} r \cdot s_{12} = 6 r s_{12}$, $f_{48} = 12 r s_{24}$ u. s. w. bis:

$$f_{3 \cdot 2^z} = 3 \cdot 2^{z-2} r \cdot s_{3 \cdot 2^{z-1}}.$$

Erkl. 79. In den Ausdrücken der letzten Gruppe für S und F kann die Wurzelgrösse im Nenner entfernt werden durch wiederholte Anwendung der in Erkl. 70 angedeuteten Umformungsmethoden. Doch geht dabei die Uebersichtlichkeit dieser Formeln verloren; und da dieselben dort (vergl. Erkl. 77) weniger dem praktischen Rechnungsbedürfnisse, als dem theoretischen Zwecke dienen, so ist es ratsamer, die obenstehenden Formen beizubehalten. Als Beispiel diene die Umformung von:

$$S_{24} = 2r \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$$

$$= 2r \sqrt{\frac{\left(2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)\left(2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)}{\left(2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)\left(2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)}}$$

$$= \frac{2r\left(2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)}{\sqrt{4 - (2 + \sqrt{3})}}$$

$$= \frac{2r\left(2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\sqrt{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}}$$

$$= \frac{2r\left[2\sqrt{2 + \sqrt{3}} - (2 + \sqrt{3})\right]}{\sqrt{1}};$$

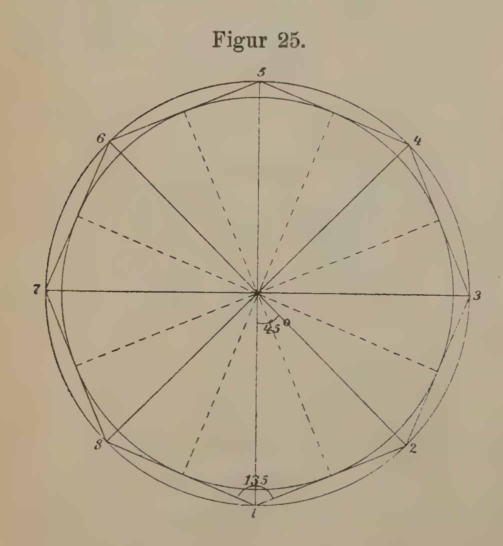
also auch:

$$F_{24} = 24 r^2 \left(2\sqrt{2 + \sqrt{3}} - 2 - \sqrt{3}\right).$$

Aehnliches gilt für S_{48}, F_{48} u. s. w.

Frage 27. Für welche regelmässigen Vielecke ergeben sich die Elemente aus jenen des regulären Vierecks?

Figur 25.



Antwort. Aus den Elementen des regulären Vierecks ergeben sich nach der Formel für s_{2n} die Elemente aller derjenigen regelmässigen Vielecke, deren Eckenzahl der Reihe nach durch Verdoppelung aus der des Vierecks hervorgeht, also s_8, s_{16}, s_{32}, s_{64} u. s. w., allgemein s_{2^z}. Man erhält nämlich:

$$s_8 = r\sqrt{2 - \sqrt{4 - \left(\frac{s_4}{r}\right)^2}}$$

$$= r\sqrt{2 - \sqrt{4 - 2}} = r\sqrt{2 - \sqrt{2}},$$

also:

$$\underline{s_8 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}.}$$

Ferner:

$$s_{16} = r\sqrt{2 - \sqrt{4 - \left(\frac{s_8}{r}\right)^2}}$$

$$= r\sqrt{2 - \sqrt{4 - (2 - \sqrt{2})}}$$

$$= r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}},$$

$$s_{32} = r\sqrt{2-\sqrt{4-\left(\frac{s_{16}}{r}\right)^2}}$$

$$= r\sqrt{2-\sqrt{4-\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)}}$$

$$= r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}},$$

$$s_{64} = r\sqrt{2-\sqrt{4-\left(\frac{s_{32}}{r}\right)^2}}$$

$$= r\sqrt{2-\sqrt{4-\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)}}$$

$$= r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}.$$

Man erkennt wieder die Regelmässigkeit der Entwicklung und kann ohne einzelne Ableitung weiter anschreiben:

$$s_{128} = r\sqrt{\Big[\underset{1}{2}-\sqrt{\Big(\underset{2}{2}+\sqrt{\Big[\underset{3}{2}+\sqrt{\Big(\underset{4}{2}+\sqrt{\underset{5}{2}+\sqrt{\underset{6}{2}}}\Big)}\Big]}\Big)}\Big]} \cdots\cdots\cdots \quad 128 = 2^7 = 2\cdot 2^6$$

$$s_{256} = r\sqrt{\Big[\underset{1}{2}-\sqrt{\Big(\underset{2}{2}+\sqrt{\Big[\underset{3}{2}+\sqrt{\Big(\underset{4}{2}+\sqrt{\Big\{\underset{5}{2}+\sqrt{\underset{6}{2}+\sqrt{\underset{7}{2}}}\Big\}}\Big)}\Big]}\Big)}\Big]} \cdots\cdots \quad 256 = 2^8 = 2\cdot 2^7$$

$$s_{2\cdot 2^z} = r\sqrt{\Big[\underset{1}{2}-\sqrt{\Big(\underset{2}{2}+\sqrt{\Big[\underset{3}{2}+\cdots\sqrt{\Big(\underset{z-3}{2}+\sqrt{\Big\{\underset{z-2}{2}+\sqrt{\underset{z-1}{2}+\sqrt{\underset{z}{2}}}\Big\}}\Big)}\cdots\Big]}\Big)}\Big]} \cdots \quad 2^{z+1} = 2\cdot 2^z.$$

Erkl. 80. Die eigentümlichen Wurzelgrössen der Art:

$$\sqrt[n]{c+\sqrt[n]{c-\sqrt[n]{c+\cdots}}}$$

treten nicht allein an dieser Stelle auf, sondern spielen auch eine Rolle in der höheren Analysis bei der Theorie der Gleichungen von der Form:

$$x^n - x \pm c = 0.$$

Dabei findet sich bei eben jenen Problemen der höheren Algebra, dass für beliebiges b und a gilt:

$$a = \sqrt[b]{a^b - a + \sqrt[b]{a^b - a + \sqrt[b]{a^b - a + \sqrt{\cdots}}}}$$

$\cdots$ ad infinitum.

Setzt man hier für a und b die Zahl 2, so entsteht:

$$2 = \sqrt{2^2 - 2 + \sqrt{2^2 - 2 + \sqrt{2^2 - 2 + \sqrt{\cdots}}}}$$

$$2 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots}}}}$$

Für $a = 2$, $b = 3$ entsteht:

$$2 = \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{\cdots}}}} \text{ u. s. w.}$$

Für $a = 3$, $b = 2$ entsteht:

$$3 = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{\cdots}}}} \text{ u. s. w.}$$

Entsprechend findet man:

$$\varrho_8 = \frac{r}{2}\sqrt{4-\left(\frac{s_8}{r}\right)^2} = \frac{r}{2}\sqrt{4-\left(2-\sqrt{2}\right)}$$

$$= \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}},$$

also:

$$\underline{\underline{\varrho_8 = \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.}}$$

Ferner:

$$\varrho_{16} = \frac{r}{2}\sqrt{4-\left(\frac{s_{16}}{r}\right)^2}$$

$$= \frac{r}{2}\sqrt{4-\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)}$$

$$= \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},$$

$$\varrho_{32} = \frac{r}{2}\sqrt{4-\left(\frac{s_{32}}{r}\right)^2}$$

$$= \frac{r}{2}\sqrt{4-\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)}$$

$$= \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}.$$

Und so fort mit allgemeiner Schreibung:

$$\varrho_{64} = \frac{r}{2}\sqrt{\underset{1}{2}+\sqrt{\underset{2}{2}+\sqrt{\underset{3}{2}+\sqrt{\underset{4}{2}+\sqrt{\underset{5}{2}}}}}} \cdots\cdots\cdots \quad 64 = 2\cdot 2^5$$

$$\varrho_{128} = \frac{r}{2}\sqrt{\Big[\underset{1}{2}+\sqrt{\Big(\underset{2}{2}+\sqrt{\Big[\underset{3}{2}+\sqrt{\Big(\underset{4}{2}+\sqrt{\underset{5}{2}+\sqrt{\underset{6}{2}}}\Big)}\Big]}\Big)}\Big]} \cdots\cdots\cdots \quad 128 = 2\cdot 2^6$$

$$\varrho_{2\cdot 2^z} = \frac{r}{2}\sqrt{\Big[\underset{1}{2}+\sqrt{\Big(\underset{2}{2}+\sqrt{\Big[\underset{3}{2}+\cdots\sqrt{\Big(\underset{z-3}{2}+\sqrt{\Big\{\underset{z-2}{2}+\sqrt{\underset{z-1}{2}+\sqrt{\underset{z}{2}}}\Big\}}\Big)}\cdots\Big]}\Big)}\Big]} \cdots \quad 2^{z+1} = 2\cdot 2^z.$$

Ferner ergibt sich:

$$f_8 = 2r^2\sqrt{2},$$

und weiter:

$$f_{16} = 4r^2\sqrt{2-\sqrt{2}} \qquad f_{32} = 8r^2\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$f_{64} = 16r^2\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \qquad f_{128} = 32r^2\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$$

$$f_{256} = 64r^2\sqrt{[\underset{1}{2}-\sqrt{(\underset{2}{2}+\sqrt{[\underset{3}{2}+\sqrt{(\underset{4}{2}+\sqrt{\underset{5}{2}+\sqrt{\underset{6}{2}}})}]})}]}\ \cdots\cdots\ 256 = 2\cdot 2^7$$

$$f_{2\cdot 2^z} = 2\cdot 2^{z-2}r^2\sqrt{[\underset{1}{2}-\sqrt{(\underset{2}{2}+\sqrt{[\underset{3}{2}+\cdots\sqrt{(\underset{z-4}{2}+\sqrt{\{\underset{z-3}{2}+\sqrt{\underset{z-2}{2}+\sqrt{\underset{z-1}{2}}}\}})}\cdots]})}]}\cdots 2^{z+1} = 2\cdot 2^z.$$

Endlich folgt für die umgeschriebenen Vielecke:

$$\underline{S_8 = 2r\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = 2r\sqrt{3-2\sqrt{2}} = 2r(\sqrt{2}-1)}$$

$$\underline{F_8 = 8r^2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = 8r^2\sqrt{3-2\sqrt{2}} = 8r^2(\sqrt{2}-1)}$$

und

$$S_{16} = 2r\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \qquad F_{16} = 16r^2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

$$S_{32} = 2r\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} \qquad F_{32} = 32r^2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$$

$$S_{64} = 2r\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}} \qquad F_{64} = 64r^2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}$$

u. s. w.

Erkl. 81. Auf die obengenannte Entwicklung:

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2\cdot\cdot}}}}$$

kommen beide nebenstehenden Entwicklungen für s_{2^z} und ϱ_{2^z} bei unbegrenzter Weiterführung zurück. Setzt man die Folge von Wurzeln in s_{2^z} gleich 2, so wird an der Grenze für $z = \infty$ die Grösse:

$$s_{2^z} = r\sqrt{2-2} = 0,$$

entsprechend dem steten Abnehmen der Vielecksseite bis 0 bei unendlich wachsender Eckenzahl. Und ebenso wird für $z = \infty$:

$$\varrho_{2^z} = \frac{r}{2}\cdot 2 = r;$$

denn bei unendlicher Eckenzahl fällt das Vieleck mit der Kreislinie, ϱ mit r zusammen.

Erkl. 82. Die Formeln für f_8, f_{16} u. s. w. können entweder aus der Formel:

$$f_{2n} = \frac{n}{2}rs_n$$

gewonnen werden, und dann hat man unmittelbar für jedes:

$$f_m = \frac{m}{4}rs_{\frac{1}{2}m};$$

oder nach der Formel:

$$f_n = \frac{n}{2}\cdot\varrho\cdot s.$$

Im letztern Falle ist die Rechnung teilweise zu wiederholen, welche zum vorhergehenden s_n führte. So wird:

$$\begin{aligned} f_8 &= 4\cdot\varrho_8 s_8 = 2r^2\sqrt{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} \\ &= 2r^2\sqrt{4-2} = 2r^2\sqrt{2}; \\ f_{16} &= 8\varrho_{16}s_{16} \\ &= 4r^2\sqrt{(2+\sqrt{2+\sqrt{2}})(2-\sqrt{2+\sqrt{2}})} \\ &= 4r^2\sqrt{4-(2+\sqrt{2})} \\ &= 4r^2\sqrt{2-\sqrt{2}}\ \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Erkl. 83. Die Formeln für S_8 u. s. w., F_8 u. s. w. entstehen am einfachsten aus den Formeln:

$$S_n = \frac{r s_n}{\varrho_n} \text{ und } F_n = \frac{n}{2} \cdot r S_n.$$

Lässt man den Bruch $\frac{s_n}{\varrho_n}$ in seinem Wurzelausdruck unverändert, so erhält man die obenstehende übersichtliche Schreibung. Diese Uebersichtlichkeit geht aber verloren, wenn man die Wurzelausdrücke im Nenner entfernt. Dabei wird z. B.:

$$S_8 = 2r\sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}}$$
$$= \frac{2r(2-\sqrt{2})}{\sqrt{2}} = 2r(\sqrt{2}-1)$$

oder auch:

$$S_8 = 2r\sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})^2}} = \frac{2r\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$$
$$= \frac{2r\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{2} = r\sqrt{2}(2-\sqrt{2})$$
$$= r(2\sqrt{2}-2) = 2r(\sqrt{2}-1)$$

oder auch:

$$S_8 = 2r\sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}}$$
$$= 2r\sqrt{\frac{4-4\sqrt{2}+2}{2}} = 2r\sqrt{\frac{6-4\sqrt{2}}{2}}$$
$$= 2r\sqrt{3-2\sqrt{2}}.$$

In der That ist aber auch:

$$(\sqrt{2}-1)^2 = 3-2\sqrt{2}$$

und umgekehrt:

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1.$$

Erkl. 84. Eine solche Umwandlung einer Wurzelgrösse von der Form $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ in eine Summe oder Differenz ist immer dann leicht möglich, wenn $a^2 - b$ ein vollständiges Quadrat ist. Man findet nämlich leicht die allgemein giltige Formel:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-b})}$$
$$\pm\sqrt{\frac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-b})}.$$

Diese Formel, die besonders für negative b, also imaginäre $\sqrt{b}$ von Wichtigkeit ist, liefert für $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ zunächst die Umwandlung in $\sqrt{3-\sqrt{8}}$ und dann, weil $3^2 - 8 = 1$ ist:

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}(3+1)} - \sqrt{\frac{1}{2}(3-1)}$$
$$= \sqrt{\frac{4}{2}} - \sqrt{\frac{2}{2}} = \sqrt{2}-1,$$

wie schon hierneben gefunden.

Frage 28. Für welche regelmässigen Vielecke ergeben sich die Elemente aus jenen des regelmässigen Zehnecks?

Antwort. Aus den Elementen des regelmässigen Zehnecks ergeben sich die Elemente aller derjenigen regelmässigen Vielecke, deren Eckenzahl der Reihe nach durch Verdoppelung aus der des Zehnecks hervorgeht, also s_{20}, s_{40}, s_{80} u. s. w., allgemein $s_{5 \cdot 2^z}$. Man erhält daher zunächst:

$$s_{20} = r\sqrt{2-\sqrt{4-\left(\frac{s_{10}}{r}\right)^2}} = r\sqrt{2-\sqrt{4-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}}$$
$$= r\sqrt{2-\sqrt{\frac{16-(6-2\sqrt{5})}{4}}} = r\sqrt{2-\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{4}}} = r\sqrt{2-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}$$

$$s_{40} = r\sqrt{2-\sqrt{4-\left(\frac{s_{20}}{r}\right)^2}} = r\sqrt{2-\sqrt{4-\left(2-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)}}$$
$$= r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}}$$

$$s_{80} = r\sqrt{2-\sqrt{4-\left(\frac{s_{40}}{r}\right)^2}} = r\sqrt{2-\sqrt{4-\left(2-\sqrt{2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}\right)}}$$

$$= r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}}}.$$

Ebenso weiter ohne einzelne Entwicklung:

$$s_{160} = r\sqrt{\Big[\underset{1}{2}-\sqrt{\Big(\underset{2}{2}+\sqrt{\Big[\underset{3}{2}+\sqrt{\Big(\underset{4}{2}+\underset{5}{\sqrt{\tfrac{5+\sqrt{5}}{2}}}\Big)}\Big]}\Big)}\Big]} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 160 = 5\cdot 2^5$$

$$s_{320} = r\sqrt{\Big[\underset{1}{2}-\sqrt{\Big(\underset{2}{2}+\sqrt{\Big\{\underset{3}{2}+\sqrt{\Big(\underset{4}{2}+\sqrt{\Big\{\underset{5}{2}+\underset{6}{\sqrt{\tfrac{5+\sqrt{5}}{2}}}\Big\}}\Big)}\Big\}}\Big)}\Big]} \quad\ldots\ldots\ldots \quad 320 = 5\cdot 2^6$$

$$s_{5\cdot 2^z} = r\sqrt{\Big[\underset{1}{2}-\sqrt{\Big(\underset{2}{2}+\sqrt{\Big\{\underset{3}{2}+\cdots\sqrt{\Big(\underset{z-3}{2}+\sqrt{\Big\{\underset{z-2}{2}+\underset{z-1}{\sqrt{2+\underset{z}{\sqrt{\tfrac{5+\sqrt{5}}{2}}}}}\Big\}}\Big)}\cdots\Big\}}\Big)}\Big]}$$

Entsprechend findet man:

$$\varrho_{20} = \frac{r}{2}\sqrt{4-\left(\frac{s_{20}}{r}\right)^2} = \frac{r}{2}\sqrt{4-\left(2-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)} = \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}$$

$$\varrho_{40} = \frac{r}{2}\sqrt{4-\left(\frac{s_{40}}{r}\right)^2} = \frac{r}{2}\sqrt{4-\left(2-\sqrt{2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}\right)}$$

$$= \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}}$$

$$\varrho_{80} = \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}}}$$

$$\varrho_{160} = \frac{r}{2}\sqrt{\underset{1}{2}+\sqrt{\underset{2}{2}+\sqrt{\underset{3}{2}+\sqrt{\underset{4}{2}+\underset{5}{\sqrt{\tfrac{5+\sqrt{5}}{2}}}}}}} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 160 = 5\cdot 2^5$$

$$\varrho_{5\cdot 2^z} = \frac{r}{2}\sqrt{\Big[\underset{1}{2}+\sqrt{\Big(\underset{2}{2}+\sqrt{\Big[\underset{3}{2}+\cdot\cdot\sqrt{\Big(\underset{z-3}{2}+\sqrt{\Big\{\underset{z-2}{2}+\underset{z-1}{\sqrt{2+\underset{z}{\sqrt{\tfrac{5+\sqrt{5}}{2}}}}}\Big\}}\Big)}\cdot\cdot\Big]}\Big)}\Big]}$$

Ferner ergibt sich:

$$f_{20} = \frac{10}{2}\cdot r\cdot s_{10} = \frac{5}{2}r^2(\sqrt{5}-1) = \frac{5}{2}r^2\sqrt{6-2\sqrt{5}}$$

$$f_{40} = \frac{20}{2}r\cdot s_{20} = 10r^2\sqrt{2-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}$$

$$f_{80} = \frac{40}{2}r s_{40} = 20r^2\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}}$$

$$f_{160} = 40r^2\sqrt{\underset{1}{2}-\sqrt{\underset{2}{2}+\sqrt{\underset{3}{2}+\underset{4}{\sqrt{\tfrac{5+\sqrt{5}}{2}}}}}} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 160 = 5\cdot 2^5$$

$$f_{320} = 80r^2\sqrt{\underset{1}{2}-\sqrt{\underset{2}{2}+\sqrt{\underset{3}{2}+\sqrt{\underset{4}{2}+\underset{5}{\sqrt{\tfrac{5+\sqrt{5}}{2}}}}}}} \quad\ldots\ldots \quad 320 = 5\cdot 2^6$$

$$f_{5\cdot 2^z} = 5\cdot 2^{z-2}\cdot r^2 \sqrt{\Big[\underset{1}{2} - \sqrt{\Big(\underset{2}{2} + \sqrt{\Big[\underset{3}{2} + \cdot\cdot \sqrt{\Big(\underset{z-4}{2} + \sqrt{\Big\{\underset{z-3}{2} + \sqrt{\underset{z-2}{2} + \sqrt{\underset{z-1}{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}}\Big\}}\Big)\cdot\cdot\Big]}\Big)}\Big]}$$

Endlich folgt für die umgeschriebenen Vielecke:

$$S_{20} = 2r\sqrt{\frac{2-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}{2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}}, \qquad F_{20} = 20r^2\sqrt{\frac{2-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}{2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}}$$

$$S_{40} = 2r\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}}}, \qquad F_{40} = 40r^2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}}}$$

$$S_{80} = 2r\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}}}{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}}}},$$

$$F_{80} = 80r^2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}}}} \quad \text{u. s. w.}$$

Erkl. 85. Eine Vergleichung der Entwicklungsreihen in den Antworten 26 bis 28 lässt eine merkwürdige Uebereinstimmung der Formeln für jede der Grössen s, ϱ, f, S, F erkennen.

Jede Reihe hat ein charakteristisches Glied, welches in jeder Formel als Radikand der innersten Wurzel auftritt. Dieser ist für die Reihe des Sechsecks bezw. Dreiecks (allg. $3\cdot 2^z$) die $\sqrt{3}$, für die Reihe des Vierecks bezw. Zweiecks (allg. $2\cdot 2^z$) die $\sqrt{2}$, für die Reihe des Zehnecks bezw. Fünfecks (allg. $5\cdot 2^z$) die

$$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}.$$

Und diese Grössen:

$$3 \text{ und } \sqrt{3},\ 2 \text{ und } \sqrt{2},\ 5 \text{ und } \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$$

treten so regelmässig einander zugeordnet auf, wie etwa zwei Grössen M und m. Aber auch jede der Grössen s, ϱ, f, S, F nimmt stets eine bestimmte Form an. Zunächst sind die stets wiederkehrenden Faktoren vor den Wurzelgrössen bei:

s	ϱ	f	S	F
r	$\frac{r}{2}$	$M\cdot 2^{z-2}\cdot r^2$	$2r$	$M\cdot 2^z\cdot r^2$

Und die Wurzelgrössen selbst enthalten bei den Ausdrücken für s und ϱ stets z Grössen, für f stets $z-1$ Grössen, für S und F stets einen Quotienten zweier ebensolchen Ausdrücke mit z Grössen. Und von diesen Grössen ist die letzte jedesmal die zur Zahl M gehörige Grösse m, alle vorhergehenden aber gleich 2. Endlich beginnt die Vorzeichenreihe unter der Wurzel bei s und f stets mit $2-\sqrt{\ }$, um sodann in eine Reihe von Pluszeichen überzugehen, während bei ϱ überhaupt nur Pluszeichen auftreten, dagegen bei F und S im Zähler des Quotienten die erste, im Nenner die zweite Reihe erscheint.

Erkl. 86. Man kann daher sämtliche Ergebnisse der Antworten 25 bis 28 zusammenfassen in die gemeinsame Aussage:

Satz. Bezeichnet man mit M eine der Grössen 2, 3, 5 und mit m jeweils die zugehörige Grösse:

$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}},$$

so gilt für einen allgemeinen Wert der Zahl z (jedesmal, wenn überhaupt mehr als eine Grösse unter der Wurzel auftritt):

$$s_{M\cdot 2z} = r\sqrt{\Big[\underset{1}{2} - \sqrt{\Big(\underset{2}{2} + \sqrt{\Big[\underset{3}{2} + \cdots \sqrt{\Big(\underset{z-3}{2} + \sqrt{\Big\{\underset{z-2}{2} + \sqrt{\underset{z-1}{2} + \underset{z}{m}}\Big\}}\Big)}\cdots\Big]}\Big)}\Big]}$$

$$\varrho_{M\cdot 2z} = \frac{r}{2}\sqrt{\Big[\underset{1}{2} + \sqrt{\Big(\underset{2}{2} + \sqrt{\Big[\underset{3}{2} + \cdots \sqrt{\Big(\underset{z-3}{2} + \sqrt{\Big\{\underset{z-2}{2} + \sqrt{\underset{z-1}{2} + \underset{z}{m}}\Big\}}\Big)}\cdots\Big]}\Big)}\Big]}$$

$$f_{M\cdot 2z} = M\cdot 2^{z-2}\cdot r^2\sqrt{\Big[\underset{1}{2} - \sqrt{\Big(\underset{2}{2} + \sqrt{\Big[\underset{3}{2} + \cdots \sqrt{\Big(\underset{z-4}{2} + \sqrt{\Big\{\underset{z-3}{2} + \sqrt{\underset{z-2}{2} + \underset{z-1}{m}}\Big\}}\Big)}\cdots\Big]}\Big)}\Big]}$$

$$S_{M\cdot 2z} = 2r\sqrt{\frac{2 - \sqrt{\Big(2 + \sqrt{\Big[2 + \cdots \sqrt{\Big(2 + \sqrt{\Big\{2 + \sqrt{2 + m}\Big\}}\Big)}\cdots\Big]}\Big)}}{\underset{1}{2} + \sqrt{\Big(\underset{2}{2} + \sqrt{\Big[\underset{3}{2} + \cdots \sqrt{\Big(\underset{z-3}{2} + \sqrt{\Big\{\underset{z-2}{2} + \sqrt{\underset{z-1}{2} + \underset{z}{m}}\Big\}}\Big)}\cdots\Big]}\Big)}}}$$

$$F_{M\cdot 2z} = M\cdot 2^{z}\cdot r^2\sqrt{\frac{2 - \sqrt{\Big(2 + \sqrt{\Big[2 + \cdots \sqrt{\Big(2 + \sqrt{\Big\{2 + \sqrt{2 + m}\Big\}}\Big)}\cdots\Big]}\Big)}}{\underset{1}{2} + \sqrt{\Big(\underset{2}{2} + \sqrt{\Big[\underset{3}{2} + \cdots \sqrt{\Big(\underset{z-3}{2} + \sqrt{\Big\{\underset{z-2}{2} + \sqrt{\underset{z-1}{2} + \underset{z}{m}}\Big\}}\Big)}\cdots\Big]}\Big)}}}.$$

Frage 29. Wie wird das regelmässige Fünfzehneck in einen gegebenen Kreis konstruiert?

Antwort. Um das regelmässige Fünfzehneck in einen gegebenen Kreis zu konstruieren, muss man eine passende Kombination zwischen den Teilungen in drittel und in fünftel Teile suchen, durch welche die Teilung der Kreisperipherie in 15 gleiche Teile ermöglicht wird. Eine solche ist:

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}.$$

Trägt man also von einem bestimmten Punkte C des Kreises (s. Figur 26) in der gleichen Richtung die Seite CB eines regelmässigen Sechsecks ab, und auch die eines regelmässigen Zehnecks CA, so ist das zwischen den Endpunkten A und B gelegene Stück $\frac{1}{15}$ der Kreisperipherie, und die Verbindungsgerade dieser Punkte bildet die Seite des dem Kreise eingeschriebenen regelmässigen Fünfzehnecks.

Zum gleichen Ziele wäre man gekommen, wenn man etwa vom Punkte C zweimal die Fünfecksseite (bis CD) und

Erkl. 87. Da die Teilungen in drittel und fünftel Teile etwas grössere Zwischenräume bilden, so ist die Benutzung jener in sechstel und zehntel Teile förderlicher, obwohl auch die erstgenannte schon zum Ziele führt. Will man ganz allgemein eine Kombination der $^1/_6$ und $^1/_{10}$ Teilung suchen, welche $^1/_{15}$ Teilung liefert, oder in andern Worten: Will man auf allgemeinem Wege suchen, zwischen welchen Eckpunkten eines Sechsecks und eines Zehnecks mit gemeinsamem Anfangspunkte eine Seite des Fünfzehnecks liegt, so setzt man die diophantische Gleichung an:

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{10} = \frac{1}{15}.$$

Diese liefert:

$$5x + 3y = 2,$$

$$y = \frac{2-5x}{3} = \frac{2+x}{3} - 2x = z - 2x;$$

$$\frac{2+x}{3} = z,\quad x = 3z - 2.$$

Also entstehen die Lösungsgruppen:

z	-2	-1	0	1	2	3
x	-8	-5	-2	1	4	7
y	$+14$	$+9$	$+4$	-1	-6	-11

u. s. w.

In der That ist:

$$\frac{1}{15} = -\frac{8}{6} + \frac{14}{10} = -\frac{5}{6} + \frac{9}{10}$$
$$= -\frac{2}{6} + \frac{4}{10} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10}$$
$$= \frac{4}{6} - \frac{6}{10} = \frac{7}{6} - \frac{11}{10} \text{ u. s. w.}$$

oder anders geschrieben, nämlich mit Kürzung bezw. Ausscheidung der Ganzen:

$$\frac{1}{15} = -\frac{4}{3} + \frac{7}{5} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10} = -\frac{1}{3} + \frac{2}{5}$$
$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10}.$$

Also jedesmal nur die beiden Arten:

$$\frac{1}{15} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10} \text{ oder } \frac{1}{15} = \frac{2}{5} - \frac{1}{3}.$$

Erkl. 88. In Figur 26 sind beiderlei Teilungen wahrzunehmen: Durch Punkte am äusseren Rande der Peripherie sind die $^1/_6$, durch Punkte am inneren Rande die $^1/_{10}$ angedeutet Und $^1/_{15}$ der Peripherie liegt als AB zwischen $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{10}$, als ED zwischen $\frac{4}{10}$ und $\frac{2}{6}$ (d. h. $\frac{2}{5}$ und $\frac{1}{3}$), als $E'D'$ zwischen $\frac{4}{6}$ und $\frac{6}{10}$ (d. h. $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{5}$) und als $A'B'$ zwischen $\frac{9}{10}$ und $\frac{5}{6}$. Davon fallen aber die Punkte $ABGC'G'B'A'$ auf ebenso viele Eckpunkte eines ersten Fünfzehnecks und $C_0F'EDD'E'F'$ auf solche eines zweiten Fünfzehnecks, welches gegen das erste um den halben Centriwinkel:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{360^0}{15} = 12^0$$

gedreht ist, sodass immer die Ecken des einen die Bogen des andern halbieren (also z. B. $BF = \frac{1}{30}$ Peripherie).

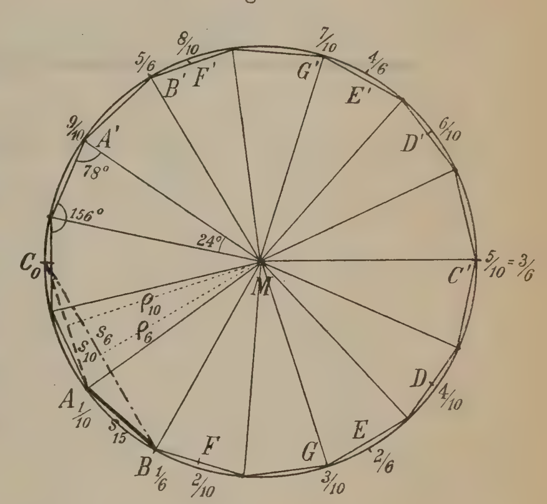
einmal die Dreiecksseite CE abgetragen hätte. Dann wäre wieder

$$DE = \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$$

der Peripherie.

Erkl. 87a. Ausführliches über diophantische Gleichungen findet man in Schüler, Lehrbuch der unbestimmten Gleichungen des ersten Grades.

Figur 26.



Frage 30. Wie berechnet man die Elemente des regelmässigen **Fünfzehnecks**?

Antwort. Um die Elemente des regelmässigen Fünfzehnecks zu berechnen, wendet man auf das Dreieck ABC in Figur 26 die Ergebnisse der Antwort 11 an. Dort ist gefunden worden, dass wenn von einem Dreieck zwei Seiten a und b sowie der Radius r des Umkreises bekannt sind, dann die dritte Seite c bestimmt ist durch die Formel:

$$c = \frac{a\sqrt{4r^2 - b^2} - b\sqrt{4r^2 - a^2}}{2r} = \frac{a\varrho_b - b\varrho_a}{r}$$

Nun ist aber oben in Figur 26 ABC

Erkl. 89. Dass im nebenstehenden die Formel mit dem Minuszeichen anzuwenden ist, geht nach Erkl. 42 daraus hervor, dass im Dreieck ABC an der Seite AB am Punkte A ein stumpfer Winkel anliegt. Dies zeigt nicht nur die äussere Anschauung der Figur, sondern auch die Rechnung: Der Winkel CAB steht auf dem Kreisbogen $CG'GB$, welcher gebildet ist von der ganzen Peripherie ausser dem Bogen CB, d. h. 360^0 ausser $^1/_6$ Peripherie $= 360^0 - 60^0 = 300^0$. Also hat:

$$\sphericalangle CAB \frac{1}{2} \cdot 300^0 = 150^0.$$

Entsprechend findet man für $\sphericalangle ABC$ auf Bogen AC oder $^1/_{10}$ Peripherie $= 36^0$ die Grösse 18^0 und für $\sphericalangle ACB$ auf Bogen AB oder $\frac{1}{15}$ Peripherie $= 24^0$ der Grösse 12^0. Zusammen:

$$150^0 + 18^0 + 12^0 = 180^0.$$

ein solches Dreieck mit gegebenem Radius r und Seiten $AC = b = s_{10}$ und $BC = a = s_6$. Ferner sind die Grössen

$$\frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - b^2} = \varrho_b \text{ und } \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2} = \varrho_a,$$

nämlich die senkrechten Abstände der Seiten AC und BC vom Kreismittelpunkt nichts anderes, als die kleinen Radien des Sechsecks, bezw. Zehnecks. Folglich entsteht unmittelbar:

$$s_{15} = \frac{s_6 \cdot \varrho_{10} - s_{10} \cdot \varrho_6}{r} = \frac{1}{r}\left(r \cdot \frac{r}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \frac{r(\sqrt{5} - 1)}{2} \cdot \frac{r}{2}\sqrt{3}\right)$$

$$s_{15} = \frac{r}{4}\left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - (\sqrt{5} - 1)\sqrt{3}\right);$$

$$s_{15} = \frac{r}{4}\left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3}\right) = \frac{r}{2}\sqrt{7 - \sqrt{5} - \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}}$$

Daraus findet man:

$$\varrho_{15} = \frac{r}{2}\sqrt{4 - \left(\frac{s_{15}}{r}\right)^2} = \frac{r}{2}\sqrt{4 - \frac{1}{16}\left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3}\right)^2}$$

$$\varrho_{15} = \frac{r}{8}\sqrt{64 - \left(10 + 2\sqrt{5} + 15 + 3 - 2\sqrt{15}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - 2\sqrt{3 \cdot 15} + 2\sqrt{3}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right)}$$

$$\varrho_{15} = \frac{r}{8}\sqrt{64 - \left(28 + 2\sqrt{5} - 6\sqrt{5} - 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\,(\sqrt{15} - \sqrt{3})\right)}$$

$$\varrho_{15} = \frac{r}{8}\sqrt{64 - 28 + 4\sqrt{5} + 2\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})(18 - 2\sqrt{45})}}$$

$$\varrho_{15} = \frac{r}{8}\sqrt{36 + 4\sqrt{5} + 2\sqrt{2(5 + \sqrt{5}) \cdot 2(9 - 3\sqrt{5})}}$$

$$= \frac{r}{8}\sqrt{36 + 4\sqrt{5} + 4\sqrt{45 + 9\sqrt{5} - 15\sqrt{5} - 15}} = \frac{r}{8}\sqrt{4(9 + \sqrt{5} + \sqrt{30 - 6\sqrt{5}})}.$$

$$\text{Also } \varrho_{15} = \frac{r}{4}\sqrt{9 + \sqrt{5} + \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}}.$$

Ferner folgt: $f_{15} = \frac{15}{2} \cdot \varrho_{15} \cdot s_{15}$, also (indem s_{15} aus Erkl. 90 entnommen):

$$f_{15} = \frac{15}{2} \cdot \frac{r}{4} \cdot \frac{r}{2} \cdot \sqrt{\left(9 + (\sqrt{5} + \sqrt{30 - 6\sqrt{5}})\right)\left(7 - (\sqrt{5} + \sqrt{30 - 6\sqrt{5}})\right)}$$

$$f_{15} = \frac{15r^2}{16}\sqrt{63 - 2(\sqrt{5} + \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}) - (\sqrt{5} + \sqrt{30 - 6\sqrt{5}})^2}$$

$$f_{15} = \frac{15r^2}{16}\sqrt{63 - 2\sqrt{5} - 2\sqrt{30 - 6\sqrt{5}} - \left(5 + 2\sqrt{5}\sqrt{30 - 6\sqrt{5}} + 30 - 6\sqrt{5}\right)}$$

$$f_{15} = \frac{15r^2}{16}\sqrt{28 + 4\sqrt{5} - 2\sqrt{(30 - 6\sqrt{5})}(1 + \sqrt{5})}$$

$$f_{15} = \frac{15r^2}{16}\sqrt{28 + 4\sqrt{5} - 2\sqrt{(30 - 6\sqrt{5})(6 + 2\sqrt{5})}}$$

$$= \frac{15r^2}{16}\sqrt{28 + 4\sqrt{5} - 4\sqrt{(15 - 3\sqrt{5})(3 + \sqrt{5})}}$$

$$f_{15} = \frac{15}{16}r^2\sqrt{4(7 + \sqrt{5} - \sqrt{45 - 9\sqrt{5} + 15\sqrt{5} - 15})} = \frac{15}{8}r^2\sqrt{7 + \sqrt{5} - \sqrt{30 + 6\sqrt{5}}}.$$

Endlich ergibt sich noch für das umgeschriebene regelmässige Fünfzehneck:

$$S_{15} = \frac{r \cdot s_{15}}{\varrho_{15}} = 2r \sqrt{\frac{7 - \sqrt{5} - \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}}{9 + \sqrt{5} + \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}}}$$

$$F_{15} = \frac{n}{2} r S_{15} = 15 r^2 \sqrt{\frac{7 - \sqrt{5} - \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}}{9 + \sqrt{5} + \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}}}$$

Erkl. 90. Die Rechnung für ϱ_{15} nimmt eine einfachere Gestalt an, wenn man die Formel für s_{15} erst in eine reine Wurzelgrösse umgestaltet, so dass dann die Grösse $\left(\frac{s_{15}}{r}\right)^2$ unter dem Wurzelzeichen für ϱ sofort gleich dem Radikanden ist. So findet man:

$$s_{15} = \frac{r}{4}\sqrt{\left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3}\right)^2}$$

$$= \frac{r}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5} + 15 + 3 - 2 \cdot 3\sqrt{5} - 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}(\sqrt{15} - \sqrt{3})}$$

$$= \frac{r}{4}\sqrt{28 - 4\sqrt{5} - 2\sqrt{3}\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})(\sqrt{5} - 1)^2}}$$

$$= \frac{r}{4}\sqrt{28 - 4\sqrt{5} - 2\sqrt{3}\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})(6 - 2\sqrt{5})}}$$

$$= \frac{r}{4}\sqrt{28 - 4\sqrt{5} - 4\sqrt{3}\sqrt{(5 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})}}$$

$$= \frac{r}{2}\sqrt{7 - \sqrt{5} - \sqrt{3}\sqrt{15 + 3\sqrt{5} - 5\sqrt{5} - 5}}$$

$$= \frac{r}{2}\sqrt{7 - \sqrt{5} - \sqrt{3(10 - 2\sqrt{5})}}.$$

Also: $$s_{15} = \frac{r}{2}\sqrt{7 - \sqrt{5} - \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}}.$$

Hiernach folgt dann weit einfacher:

$$\varrho_{15} = \frac{r}{2}\sqrt{4 - \frac{1}{4}\left(7 - \sqrt{5} - \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}\right)} = \frac{r}{4}\sqrt{16 - \left(7 - \sqrt{5} - \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}\right)}$$

$$= \frac{r}{4}\sqrt{9 + \sqrt{5} + \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}},$$

wie obenstehend.

Erkl. 91. Der oben abgeleitete Wert:

$$\frac{r}{2}\sqrt{7 - \sqrt{5} - \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}}$$

kommt nicht nur für die Berechnung von ϱ_{15} vorteilhaft zur Verwendung, sondern auch zur Berechnung von f_{15} bietet derselbe grössere Erleichterung als der ursprüngliche. Auch hier müsste der ursprüngliche Wert, um mit der $\sqrt{9 + \sqrt{5} + \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}}$ multipliziert zu werden, erst ins Quadrat erhoben und als Faktor unter das Wurzelzeichen gebracht werden. Dasselbe gilt für S_{15} und F_{15}, wo die übersichtliche Schreibung der Werte als Quotienten zweier Wurzeln nur durch die Wahl des Wurzelausdrucks für s_{15} ermöglicht wird.

Frage 31. Für welche regelmässigen Vielecke ergeben sich die Elemente aus jenen des regelmässigen Fünfzehnecks?

Antwort. Aus den Elementen des regulären Fünfzehnecks ergeben sich die Elemente aller derjenigen regelmässigen Vielecke, deren Eckenzahl der Reihe nach durch Verdoppelung aus der

Zahl 15 hervorgeht, also s_{30}, s_{60}, s_{120}, allg. $s_{2^z \cdot 15}$, Man erhält nämlich:

$$s_{30} = r\sqrt{2-\sqrt{4-\left(\frac{s_{15}}{r}\right)^2}} = r\sqrt{2-\sqrt{4-\frac{1}{4}\left(7-\sqrt{5}-\sqrt{30-6\sqrt{5}}\right)}}$$

$$= r\sqrt{2-\frac{1}{2}\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}}$$

$$s_{60} = r\sqrt{2-\sqrt{4-\left(\frac{s_{30}}{r}\right)^2}} = r\sqrt{2-\sqrt{4-\left(2-\frac{1}{2}\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}\right)}}$$

$$= r\sqrt{2-\sqrt{2+\frac{1}{2}\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}}}$$

$$s_{120} = r\sqrt{2-\sqrt{4-\left(2-\sqrt{2+\frac{1}{2}\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}}\right)}}$$

$$= r\underset{1}{\sqrt{\left[2-\underset{2}{\sqrt{\left(2+\underset{3}{\sqrt{2+\frac{1}{2}\underset{4}{\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}}}}\right)}}\right]}} \cdots 120 = \left(\frac{15}{2}\right)\cdot 2^4$$

also allgemein:

$$s_{\frac{15}{2}\cdot 2^z} = r\underset{1}{\sqrt{\left[2-\underset{2}{\sqrt{\left(2+\underset{3}{\sqrt{\left[2+\cdots\underset{z-3}{\sqrt{\left(2+\underset{z-2}{\sqrt{\left\{2+\underset{z-1}{\sqrt{2+\frac{1}{2}\underset{z}{\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}}}}\right\}}}\right)}}\cdots\right]}}\right)}}\right]}}$$

Ebenso entsteht der Reihe nach:

$$\varrho_{30} = \frac{r}{2}\sqrt{4-\left(\frac{s_{30}}{r}\right)^2} = \frac{r}{2}\sqrt{4-\left(2-\frac{1}{2}\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}\right)}$$

$$= \frac{r}{2}\sqrt{2+\frac{1}{2}\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}}$$

$$\varrho_{60} = \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\frac{1}{2}\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}}}$$

$$\varrho_{120} = \frac{r}{2}\underset{1}{\sqrt{2+\underset{2}{\sqrt{2+\underset{3}{\sqrt{2+\frac{1}{2}\underset{4}{\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}}}}}}}} \cdots 120 = \left(\frac{15}{2}\right)\cdot 2^4.$$

Ferner folgt:

$$f_{30} = \frac{15}{4}r^2\sqrt{7-\sqrt{5}-\sqrt{30-6\sqrt{5}}}$$

$$f_{60} = 15r^2\sqrt{2-\frac{1}{2}\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}}$$

$$f_{120} = 30r^2\underset{1}{\sqrt{2-\underset{2}{\sqrt{2+\frac{1}{2}\underset{3}{\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}}}}}} \cdots 120 = \left(\frac{15}{2}\right)\cdot 2^4.$$

Endlich ergibt sich für die umgeschriebenen Vielecke:

$$S_{30} = 2r\sqrt{\frac{2-\frac{1}{2}\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}}{2+\frac{1}{2}\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}}}$$

$$F_{30} = 30r^2\sqrt{\frac{2-\frac{1}{2}\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}}{2+\frac{1}{2}\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}}}$$

$$S_{60} = 2r\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\frac{1}{2}\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}}}{2+\sqrt{2+\frac{1}{2}\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}}}}$$

$$F_{60} = 60r^2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\frac{1}{2}\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}}}{2+\sqrt{2+\frac{1}{2}\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}}}}$$

$$S_{120} = 2r\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\frac{1}{2}\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\frac{1}{2}\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}}}}}$$

$$F_{120} = 120r^2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\frac{1}{2}\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\frac{1}{2}\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}}}}}$$

u. s. w.

Erkl. 92. Da $\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{30}$, so könnte man s_{30} auch nach Analogie der Antwort 30 und Figur 26 ableiten, indem dort $a = s_5$, $b = s_6$ gesetzt würde, also:

$$s_{30} = \frac{s_5\cdot\varrho_6 - s_6\cdot\varrho_5}{r} = \frac{1}{r}\left\{\frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\cdot\frac{r}{2}\sqrt{3} - r\cdot\frac{r}{4}\sqrt{6+2\sqrt{5}}\right\}$$

$$= \frac{r}{4}\left(\sqrt{30-6\sqrt{5}} - \sqrt{6+2\sqrt{5}}\right).$$

Dass dieser Ausdruck gleich ist dem oben für s_{30} gefundenen, lässt sich wie folgt nachweisen. Zunächst wird:

$$\frac{r}{4}\left(\sqrt{30-6\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}\right) = \frac{r}{4}\sqrt{30-6\sqrt{5}-2\sqrt{(30-6\sqrt{5})\,(6+2\sqrt{5})}+6+2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{r}{4}\sqrt{36-4\sqrt{5}-2\sqrt{6\cdot 2\,(5-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}} = \frac{r}{4}\sqrt{36-4\sqrt{5}-4\sqrt{3\,(15-3\sqrt{5}+5\sqrt{5}-5)}}$$

$$= \frac{r}{4}\sqrt{4\left(9-\sqrt{5}-\sqrt{3\,(10+2\sqrt{5})}\right)} = \frac{r}{2}\sqrt{9-\sqrt{5}-\sqrt{30+6\sqrt{5}}}.$$

Dieser Ausdruck liefert ferner:

$$r\sqrt{2-\frac{-1+\sqrt{5}+\sqrt{30+6\sqrt{5}}}{4}}$$

$$= r\sqrt{2-\frac{1}{4}\sqrt{1+5+30+6\sqrt{5}-2\sqrt{5}+2\sqrt{30+6\sqrt{5}}\,(\sqrt{5}-1)}}$$

$$= r\sqrt{2-\frac{1}{4}\sqrt{36+4\sqrt{5}+2\sqrt{6\,(5+\sqrt{5})\,(6-2\sqrt{5})}}}$$

$$= r\sqrt{2-\frac{1}{4}\sqrt{4\left(9+\sqrt{5}+\sqrt{3\,(5+\sqrt{5})\,(3-\sqrt{5})}\right)}}$$

$$= r\sqrt{2-\frac{1}{2}\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}} \text{ wie oben.}$$

Erkl. 93. Die Formeln für ϱ, f sind der Raumersparnis wegen obenstehend nicht in allgemeiner Form für $\left(\frac{15}{2}\right)\cdot 2^z$ Ecken angeschrieben. Die vorhandenen Formeln für f ergeben sich am einfachsten aus der Formel:

$$f_{2n} = \frac{n}{2} r s_n,$$

können aber auch abgeleitet werden aus der Formel:

$$f_n = \frac{n}{2} \varrho_n s_n, \quad \text{also:} \quad f_{30} = 15 \cdot \varrho_{30} \cdot s_{30} \text{ u. s. w.}$$

Erkl. 94. Man erkennt sofort, dass die obenstehenden Formeln sich ebenfalls eingliedern in die allgemeinen Ausdrücke des Satzes in der Erkl. 86, wenn man für die beiden Werte M und m andere Bestimmung trifft. Man muss nämlich wählen:

$$M = \frac{15}{2}, \; m = \frac{1}{2}\sqrt{9 + \sqrt{5} + \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}}.$$

Denn der letztere Ausdruck ist es, der in allen Wurzeln im innersten Radikanden wiederkehrt.

Erkl. 95. Dass für M nicht 15, sondern $\frac{15}{2}$ zu setzen ist, bildet keine Abweichung vom bisherigen, denn auch dort treten ja nicht die Ziffern der ursprünglichen abgeleiteten Vielecke (Sechseck, Viereck, Zehneck) für M auf, sondern deren Hälften 3, 2, 5. Allerdings wäre es an jener früheren Stelle unbequem gewesen:

$$\frac{6}{2}, \; \frac{4}{2}, \; \frac{10}{2}$$

zu schreiben, da hier jedesmal die Kürzung zu den Grössen 3, 2, 5 führte. Hier aber ist $\frac{15}{2}$ ein unkürzbarer Bruch und muss daher auch so in der Rechnung mitgeführt werden.

Erkl. 96. Der mittlere Ausdruck:

$$s_{30} = \frac{r}{2}\sqrt{9 - \sqrt{5} - \sqrt{30 + 6\sqrt{5}}}$$

in voriger Erkl. 92 würde, wenn allgemein für s_{30} eingeführt, auch die folgenden Ausdrücke für ϱ_{30} u. s. w., sowie s_{60} u. s. w. beeinflussen, so dass statt obiger M und m andere Ausdrücke mit 15 statt $\frac{15}{2}$ erscheinen. Doch scheint es wünschenswerter, die Uebersichtlichkeit der Reihe eher ein Glied früher als ein Glied später zu ermöglichen. Und doch wäre letzteres die Folge der Umgestaltung.

Frage 32. Was versteht man unter dem „Problem der Kreisteilung"?

Antwort. Unter dem Problem der Kreisteilung versteht man die Aufgabe, eine Kreisperipherie in beliebig viel gleiche Teile von gegebener Anzahl zu teilen. Da durch die Eckpunkte eines eingeschriebenen regelmässigen n-Ecks die Peripherie in n gleiche Teile geteilt wird, so ist die Aufgabe der Kreisteilung dieselbe mit der Aufgabe, regelmässige Vielecke von beliebig gegebener Eckenzahl zu konstruieren.

Das Problem der Kreisteilung ist daher im vorhergehenden gelöst für folgende Divisoren unter 100: 2, 3, 4, 5, 6, ·, 8, ·, 10, ·, 12, ··, 15, 16, ···, 20, ···, 24, ·····, 30, 32, 36, 40, 48,

Erkl. 97. Dass die Bogenstücke zwischen je zwei beliebig aufeinanderfolgenden Eckpunkten eines regelmässigen n-Ecks untereinander gleich sein müssen, geht am leichtesten hervor aus einer Drehung der ganzen Figur um den Centriwinkel $\frac{360^0}{n}$. Dabei fällt der Reihe nach Bogen auf Bogen und Ecke auf Ecke. Daher ist die Herstellung der Eckpunkte eines regelmässigen Vielecks identisch mit der Teilung des Kreises in die entsprechende Zahl gleicher Teile, und umgekehrt ist die Teilung der Kreisperipherie in n gleiche Teile identisch mit der Festlegung der Ecken eines regelmässigen eingeschriebenen n-Ecks.

Erkl. 98. Kennt man die Kreisteilung für irgend welche Primzahl-Divisoren, z. B. $p, q, r, s \cdots$, so lassen sich daraus alle Teilungen mit solchen Divisoren herstellen, die als Produkte der ersten Potenzen von $p, q, r, s \cdots$ zusammengesetzt sind, also in pq, pr, ps, qr, qs, rs; $p \cdot q \cdot r, \cdots pqrs$ u. s. w. Teile. Folglich braucht man auch umgekehrt nur die Kreisteilung mit solchen Divisoren direkt zu untersuchen, die selbst Primzahlen oder Potenzen von Primzahlen sind. Die Zurückführung allgemeiner Aufgaben auf die letztgenannten kann dann ähnlich wie in Erkl. 87 geschehen. So findet man aus:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{17} = \frac{1}{51},$$

dass:

$$\frac{1}{51} = \frac{6}{17} - \frac{1}{3};$$

und ebenso:

$$\frac{1}{85} = \frac{3}{5} - \frac{10}{17}$$

oder:

$$\frac{1}{85} = \frac{7}{17} - \frac{2}{5} \text{ u. s. w.};$$

ebenso aus:

$$\frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 17} = \frac{x}{3} + \frac{y}{5} + \frac{z}{17},$$

dass:

$$\frac{1}{255} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{9}{17} \text{ u. s. w.}$$

Erkl. 99. Das Problem der Kreisteilung ist eines von denen, womit sich die Geometer des Altertums wie der Neuzeit viel beschäftigt haben. Dasselbe hat durch die Untersuchungen von Gauss seinen Abschluss gefunden, insofern die genaue Begrenzung der Lösbarkeit und Lösungsmethode als Abschluss eines Problems bezeichnet werden muss. Genaueres über dieses Problem findet man in der trefflichen Festschrift von Klein „Ueber ausgewählte Fragen der Elementargeometrie“.

60, 64, 80, 96, die für sich selbst und ihre Fortsetzung ihren allgemeinen Ausdruck finden in den Gruppen:

$$2 \cdot 2^z, \ 3 \cdot 2^z, \ 5 \cdot 2^z, \ 15 \cdot 2^z$$

Die einzige Primzahl unter 100, für welche die elementare Konstruktion (d. h. mit Lineal und Zirkel — aber nur mit Zuhilfenahme von rechnerischen Hilfsmitteln, die nicht mehr der Elementar-Mathematik angehören) noch ausserdem möglich ist, ist 17. Dadurch gesellen sich zu obiger Zahlenreihe noch die Werte 17, 34, 68, und ferner durch passende Kombination zwischen 17 und 3 bezw. 5 die Zahlen 51 bezw. 85, also allgemein die Gruppen der Form:

$$17 \cdot 2^z, \ 51 \cdot 2^z, \ 85 \cdot 2^z, \ 255 \cdot 2^z.$$

Der berühmte Mathematiker Gauss hat bewiesen, dass die Kreisteilung elementar, d. h. durch Konstruktion mit Zirkel und Lineal möglich ist für Primzahl-Divisoren von der Form $2^{(2^z)} + 1$, für alle anderen Primzahlen und Primzahlpotenzen aber unmöglich. Es lässt sich aber zeigen, dass die Bedingung der Form $2^{(2^z)} + 1$ sich deckt mit der Bedingung $2^z + 1$, d. h. dass wenn $2^z + 1$ eine Primzahl ist, dann z selbst eine Potenz von 2 sein muss. Also kann man sagen, die Kreisteilung ist nur möglich für solche Primzahlen n, für welche die Zahl $n - 1$ eine Potenz von 2 ist, — sonst unmöglich.

Erkl. 100. Die Zahlen der Form $2^{2^z} + 1$ bilden folgende Reihe:

$z = 0$, $2^1 + 1 = 2 + 1 = 3$
$z = 1$, $2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$ } die beiden schon aus dem Altertum bekannten Fälle;
$z = 2$, $2^4 + 1 = 16 + 1 = 17$: der von Gauss selbst erledigte Fall;
$z = 3$, $2^8 + 1 = 256 + 1 = 257$: behandelt von Richelot;
$z = 4$, $2^{16} + 1 = 65536 + 1 = 65537$: behandelt von Hermes;
$z = 5$, $2^{32} + 1 = 4294967297$: keine Primzahl, ebensowenig wie die Zahlen für
$z = 6$, nämlich $2^{64} + 1$ und für $z = 7$, nämlich $2^{128} + 1$.

Weitere Beispiele sind bisher noch nicht untersucht worden.

Frage 33. Welches sind nach dem bisherigen die Elemente aller behandelten regulären Polygone?

Antwort. Die Elemente der im bisherigen behandelten regulären Polygone sind in übersichtlicher Zusammenstellung in der nebenstehenden Tabelle wiedergegeben:

Erkl. 101. In der nebenstehenden Tabelle sind die Ergebnisse des vorhergehenden Abschnittes zusammengestellt, nämlich die Formeln der Grössen s, ϱ, S, f, F für die regelmässigen Vielecke von 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 32, 40, 48, 60, 64, 80, 96 Ecken, jede Formel mit Angabe des Ziffernwertes, und ausserdem die Ziffernwerte der Grössen u und U, sowie des Centriwinkels und der Vieleckswinkel. Für die regelmässigen Vielecke von 17, 34, 51, 68, 85, 102 Ecken, welche alle mit dem noch elementar konstruierbaren regelmässigen Siebzehneck zusammenhängen, sind nur die Ziffernwerte der genannten Elemente angegeben.

Erkl. 102. Am Schlusse der nebenstehenden Tabelle sind noch für einige weitere regelmässigen Vielecke die Ziffernwerte der vorgenannten Elemente angeführt. Dieselben sind nicht auf elementarem Wege herzustellen und sollen daher an dieser Stelle nur dazu dienen, die Art der weiteren Entwicklung der Tabelle anzudeuten. Dabei sei ausdrücklich hervorgehoben, dass diese Dezimalbrüche in ihren letzten Stellen sehr umständliche Bestimmungsrechnungen erfordern, und dass hier nur durch ihre relative Grösse zu einander und zu den vorhergehenden Werten die Uebersicht über die Weitergestaltung dieser Grössen ermöglicht werden soll.

Erkl. 103. In der Ueberschrift der nebenstehenden Tabelle sind — behufs Ermöglichung einer Vergleichung mit den andern geometrischen Fächern — auch die trigonometrischen Ausdrücke für die Formeln der vorkommenden Elemente der regelmässigen Vielecke angegeben. Während über deren Entstehung auf die der Kleyerschen Encyklopädie angehörigen Lehrbücher der Goniometrie und Trigonometrie verwiesen werden muss, sei hier nur darauf hingezeigt, dass wenn für s, ϱ, S, f diese Formeln angenommen werden, dann für u, U, F die entsprechenden Ausdrücke entstehen aus den darüberstehenden Beziehungen:

$$u = n \cdot s, \quad U = n \cdot S, \quad F = \frac{r}{2} \cdot U.$$

Erkl. 104. Was schon in Antwort 103 des IV. Teiles dieses Lehrbuches angegeben wurde über das Abnehmen bezw. Wachsen der Grössen s, ϱ u. s. w. bei steigender Eckenzahl, findet sich in der nebenstehenden Tabelle ziffernmässig bestätigt. Die Grössen s, S, U, F nehmen immer ab mit steigendem n, — ϱ u und f nehmen zu, aber die beiden erstgenannten Grössen s und S nehmen unbegrenzt ab, alle andern fallen bezw. steigen nur bis zu einer gewissen Grenze hin (insbes. ϱ zu $1 \cdot r$ hin). Dabei findet zwischen s und S, sowie zwischen u und U und zwischen f und F eine stetige Annäherung statt, so dass zuletzt der Unterschied überhaupt ein unmerklicher wird. Während nämlich s und S gemeinsam der Null zustreben, kommen die Grössen u und U, sowie f und F einander stetig entgegen, u und f von unten nach oben, U und F von oben nach unten, so dass die Unterschiede zuletzt erst in den letzten Dezimalstellen erkennbar sind Und dabei erkennt man noch die äusserst bemerkenswerte Thatsache, dass die Grenze des gemeinsamen Ziffernwertes bei f und F offenbar genau die Hälfte des gemeinsamen Ziffernwertes bei u und U ist. Genauere Ausführungen dieses bemerkenswerten Umstandes findet man im folgenden Abschnitte dieses Lehrbuches.

Erkl. 105. Inwiefern die Werte der nebenstehenden Tafel auch für die regelmässigen Sternvielecke verwendbar gemacht werden können, sowie für die Grössen der Diagonalen der regelmässigen Vielecke, findet man ausgeführt in den zu diesem Abschnitte gehörigen Aufgaben der Aufgabensammlung am Schlusse dieses Teiles. Ebendort finden sich auch noch einige allgemeine Beziehungen für die Grössen s, S, u, U, f, F der regelmässigen Vielecke von einfacher und doppelter Seitenzahl.

Vielecke.

u	U	f
$= n \cdot s_n$	$U_n = n \cdot S_n$	$f_n = \frac{n}{2} \cdot \varrho_n s_n$
		3,1365484
95055 $\cdot r$	6,28765955 $\cdot r$	3,1371243
57052 $\cdot r$	6,28641712 $\cdot r$	$20 r^2 \sqrt{2 - \sqrt{2 +}}$ 3,1383638
75489 $\cdot r$	6,28604788 $\cdot r$	3,1387324
06391 $\cdot r$	6,28542920 $\cdot r$	$24 r^2 \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ 3,1393502
24428 $\cdot r$	6,28522539 $\cdot r$	3,1396323
.	.	.
—	—	—
.	.	.
10556 $\cdot r$	6,28334481 $\cdot r$	3,1414331
7497 $\cdot r$	6,28320598 $\cdot r$	3,1415719
8528 $\cdot r$	6,28318535 $\cdot r$	3,14159261
071 73 $\cdot r$	6,28318 53071 92 $\cdot r$	3,14159 2653

Die Elemente der regelmässigen Vielecke.

n	Centriwinkel	Vieleckswinkel	s	ϱ	S	u	U	f	F
Allgemeine Formel:	$\frac{360^0}{n}$	$\frac{n-2}{n}\cdot 180^0$	s_n	$\varrho_n=\frac{r}{2}\sqrt{4-\left(\frac{s_n}{r}\right)^2}$	$S_n=\frac{r\cdot s_n}{\varrho_n}$	$u_n=n\cdot s_n$	$U_n=n\cdot S_n$	$f_n=\frac{n}{2}\cdot\varrho_n s_n=\frac{u_n\varrho_n}{2}$	$F_n=\frac{n}{2}\cdot r S_n=\frac{U_n\cdot r}{2}$
Trigonometr. Ausdruck:	(vergleiche Erklärung 103 in Sachs, Ebene Elementar-Geometrie, VIII. Teil)		$s_n=2r\sin\frac{180^0}{n}$	$\varrho_n=r\cos\frac{180^0}{n}$	$S_n=2r\,\mathrm{tg}\,\frac{180^0}{n}$	$u_n=2nr\sin\frac{180^0}{n}$	$U_n=2nr\,\mathrm{tg}\,\frac{180^0}{n}$	$f_n=\frac{n}{2}\cdot r^2\cdot\sin\frac{360^0}{n}$	$F_n=nr^2\,\mathrm{tg}\,\frac{180^0}{n}$
3	120⁰	60⁰	$r\cdot\sqrt{3}$ $1{,}73205081\cdot r$	$\frac{1}{2}r$ $0{,}50000000\cdot r$	$2r\sqrt{3}$ $3{,}46410162\cdot r$	$5{,}19615242\cdot r$	$10{,}39230485\cdot r$	$\frac{3}{4}r^2\sqrt{3}$ $1{,}29903811\cdot r^2$	$3r^2\sqrt{3}$ $5{,}19615242\cdot r^2$
4	90⁰	90⁰	$r\cdot\sqrt{2}$ $1{,}41421356\cdot r$	$\frac{1}{2}r\sqrt{2}$ $0{,}70710678\cdot r$	$2r$ $2{,}00000000\cdot r$	$5{,}65685425\cdot r$	$8{,}00000000\cdot r$	$2r^2$ $2{,}00000000\cdot r^2$	$4r^2$ $4{,}00000000\cdot r^2$
5	72⁰	108⁰	$\frac{1}{2}r\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ $1{,}17557050\cdot r$	$\frac{1}{4}r\sqrt{6+2\sqrt{5}}$ $0{,}80901699\cdot r$	$2r\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ $1{,}45308539\cdot r$	$5{,}87785252\cdot r$	$7{,}26542695\cdot r$	$\frac{5}{8}r^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ $2{,}37764129\cdot r^2$	$5r^2\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ $3{,}63271348\cdot r^2$
6	60⁰	120⁰	r $1{,}00000000\cdot r$	$\frac{1}{2}r\sqrt{3}$ $0{,}86602540\cdot r$	$\frac{2}{3}r\sqrt{3}$ $1{,}15470054\cdot r$	$6{,}00000000\cdot r$	$6{,}92820323\cdot r$	$\frac{3}{2}r^2\sqrt{3}$ $2{,}59807621\cdot r^2$	$2r^2\sqrt{3}$ $3{,}46410162\cdot r^2$
8	45⁰	135⁰	$r\sqrt{2-\sqrt{2}}$ $0{,}76536686\cdot r$	$\frac{1}{2}r\sqrt{2+\sqrt{2}}$ $0{,}92387953\cdot r$	$2r\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$ $0{,}82842712\cdot r$	$6{,}12293492\cdot r$	$6{,}62741700\cdot r$	$2r^2\sqrt{2}$ $2{,}82842712\cdot r^2$	$8r^2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$ $3{,}31370850\cdot r^2$
10	36⁰	144⁰	$\frac{1}{2}r(\sqrt{5}-1)$ $0{,}61803385\cdot r$	$\frac{1}{4}r\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ $0{,}95105652\cdot r$	$\frac{2}{5}r\sqrt{25-10\sqrt{5}}$ $0{,}64983939\cdot r$	$6{,}18033846\cdot r$	$6{,}49839392\cdot r$	$\frac{5}{4}r^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ $2{,}93892626\cdot r^2$	$2r^2\sqrt{25-10\sqrt{5}}$ $3{,}24919696\cdot r^2$
12	30⁰	150⁰	$r\sqrt{2-\sqrt{3}}$ $0{,}51763809\cdot r$	$\frac{1}{2}r\sqrt{2+\sqrt{3}}$ $0{,}96592583\cdot r$	$2r(2-\sqrt{3})$ $0{,}53589838\cdot r$	$6{,}21165708\cdot r$	$6{,}43078062\cdot r$	$3r^2$ $3{,}00000000\cdot r^2$	$12r^2(2-\sqrt{3})$ $3{,}21539031\cdot r^2$
15	24⁰	156⁰	$\frac{1}{2}r\sqrt{7-\sqrt{5}-\sqrt{30-6\sqrt{5}}}$ $0{,}41582338\cdot r$	$\frac{1}{4}r\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}$ $0{,}97814760\cdot r$	$2r\sqrt{\frac{7-\sqrt{5}-\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}}$ $0{,}42511312\cdot r$	$6{,}23735073\cdot r$	$6{,}37669685\cdot r$	$\frac{15}{8}r^2\sqrt{7+\sqrt{5}-\sqrt{30+6\sqrt{5}}}$ $3{,}05052475\cdot r^2$	$15r^2\sqrt{\frac{7-\sqrt{5}-\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}}$ $3{,}18834843\cdot r^2$
16	22⁰ 30′	157⁰ 30′	$r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ $0{,}39018064\cdot r$	$\frac{1}{2}r\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ $0{,}98078528\cdot r$	$2r\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$ $0{,}39782474\cdot r$	$6{,}24289030\cdot r$	$6{,}36519576\cdot r$	$4r^2\sqrt{2-\sqrt{2}}$ $3{,}06146746\cdot r^2$	$16r^2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$ $3{,}18259788\cdot r^2$
17	21⁰ 10′ 35 $\frac{5}{17}$″	158⁰ 49′ 24 $\frac{12}{17}$″	$0{,}36749904\cdot r$	$0{,}98297310\cdot r$	$0{,}37386479\cdot r$	$6{,}24748360\cdot r$	$6{,}35570149\cdot r$	$3{,}07055416\cdot r^2$	$3{,}17785075\cdot r^2$
20	18⁰	162⁰	$r\sqrt{2-\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}}$ $0{,}31286893\cdot r$	$\frac{1}{2}r\sqrt{2+\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}}$ $0{,}98768834\cdot r$	$2r\sqrt{\frac{2-\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}}{2+\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}}}$ $0{,}31676888\cdot r$	$6{,}25737860\cdot r$	$6{,}33537762\cdot r$	$\frac{5}{2}r^2\sqrt{6-2\sqrt{5}}$ $3{,}09016994\cdot r^2$	$20r^2\sqrt{\frac{2-\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}}{2+\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}}}$ $3{,}16768881\cdot r^2$
24	15⁰	165⁰	$r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ $0{,}26105238\cdot r$	$\frac{1}{2}r\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ $0{,}99144486\cdot r$	$2r\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$ $0{,}26330500\cdot r$	$6{,}26525724\cdot r$	$6{,}31931989\cdot r$	$6r^2\sqrt{2-\sqrt{3}}$ $3{,}10582854\cdot r^2$	$24r^2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$ $3{,}15965994\cdot r^2$
30	12⁰	168⁰	$r\sqrt{2-\frac{1}{2}\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}}$ $0{,}20905693\cdot r$	$\frac{1}{2}r\sqrt{2+\frac{1}{2}\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}}$ $0{,}99452189\cdot r$	$2r\sqrt{\frac{2-\frac{1}{2}\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}}{2+\frac{1}{2}\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}}}$ $0{,}21020847\cdot r$	$6{,}27170780\cdot r$	$6{,}30625412\cdot r$	$\frac{15}{4}r^2\sqrt{7-\sqrt{5}-\sqrt{30-6\sqrt{5}}}$ $3{,}11867537\cdot r^2$	$30r^2\sqrt{\frac{2-\frac{1}{2}\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}}{2+\frac{1}{2}\sqrt{9+\sqrt{5}-\sqrt{30-6\sqrt{5}}}}}$ $3{,}15312706\cdot r^2$
32	11⁰ 15′	168⁰ 45′	$r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$ $0{,}19603428\cdot r$	$\frac{1}{2}r\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$ $0{,}99518473\cdot r$	$2r\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$ $0{,}19698281\cdot r$	$6{,}27309698\cdot r$	$6{,}30344982\cdot r$	$8r^2\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ $3{,}12144515\cdot r^2$	$32r^2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$ $3{,}15172491\cdot r^2$
34	10⁰ 35′ 17 $\frac{11}{17}$″	169⁰ 24′ 42 $\frac{6}{17}$″	$0{,}18453672\cdot r$	$0{,}99573418\cdot r$	$0{,}18532729\cdot r$	$6{,}27424846\cdot r$	$6{,}30112794\cdot r$	$3{,}12374181\cdot r^2$	$3{,}15056397\cdot r^2$
40	9⁰	171⁰	$r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}}}$ $0{,}15691819\cdot r$	$\frac{1}{2}r\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}}}$ $0{,}99691733\cdot r$	$2r\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}}}}$ $0{,}15740345\cdot r$	$6{,}27672766\cdot r$	$6{,}29613800\cdot r$	$10r^2\sqrt{2-\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}}$ $3{,}12868930\cdot r^2$	$40r^2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}}}}$ $3{,}14806900\cdot r^2$
48	7⁰ 30′	172⁰ 30′	$r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$ $0{,}13080626\cdot r$	$\frac{1}{2}r\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$ $0{,}99785890\cdot r$	$2r\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$ $0{,}13108694\cdot r$	$6{,}27870041\cdot r$	$6{,}29217291\cdot r$	$12r^2\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ $3{,}13262861\cdot r^2$	$48r^2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$ $3{,}14608646\cdot r^2$
51	7⁰ 3′ 31 $\frac{13}{17}$″	172⁰ 56′ 28 $\frac{4}{17}$″	$0{,}12312181\cdot r$	$0{,}99810333\cdot r$	$0{,}12335577\cdot r$	$6{,}27921225\cdot r$	$6{,}29114448\cdot r$	$3{,}13365132\cdot r^2$	$3{,}14557224\cdot r^2$
60	6⁰	174⁰	$r\sqrt{2-\sqrt{2+\frac{1}{2}\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}}}$ $0{,}10467191\cdot r$	$\frac{1}{2}r\sqrt{2+\sqrt{2+\frac{1}{2}\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}}}$ $0{,}99862953\cdot r$	$2r\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\frac{1}{2}\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}}}{2+\sqrt{2+\frac{1}{2}\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}}}}$ $0{,}10481556\cdot r$	$6{,}28031475\cdot r$	$6{,}28893352\cdot r$	$15r^2\sqrt{2-\frac{1}{2}\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}}$ $3{,}13585383\cdot r^2$	$60r^2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\frac{1}{2}\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}}}{2+\sqrt{2+\frac{1}{2}\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}}}}$ $3{,}14446676\cdot r^2$
64	5⁰ 37′ 30″	174⁰ 22′ 30″	$r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$ $0{,}098135349\cdot r$	$\frac{1}{2}r\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$ $0{,}99879546\cdot r$	$2r\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}$ $0{,}098253700\cdot r$	$6{,}28066232\cdot r$	$6{,}28823677\cdot r$	$16r^2\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$ $3{,}13654849\cdot r^2$	$64r^2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}$ $3{,}14411839\cdot r^2$
68	5⁰ 17′ 38 $\frac{14}{17}$″	174⁰ 42′ 21 $\frac{3}{17}$″	$0{,}092366920\cdot r$	$0{,}99893297\cdot r$	$0{,}092465582\cdot r$	$6{,}28095055\cdot r$	$6{,}28765955\cdot r$	$3{,}13712431\cdot r^2$	$3{,}14382978\cdot r^2$
80	4⁰ 30′	175⁰ 30′	$r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}}}}$ $0{,}078519632\cdot r$	$\frac{1}{2}r\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}}}}$ $0{,}99922904\cdot r$	$2r\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}}}}}$ $0{,}078580214\cdot r$	$6{,}28157052\cdot r$	$6{,}28641712\cdot r$	$20r^2\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}}}$ $3{,}13836383\cdot r^2$	$80r^2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}}}}}$ $3{,}14320856\cdot r^2$
85	4⁰ 14′ 7 $\frac{1}{17}$″	175⁰ 45′ 52 $\frac{16}{17}$″	$0{,}073902999\cdot r$	$0{,}99931706\cdot r$	$0{,}073953505\cdot r$	$6{,}28175489\cdot r$	$6{,}28604788\cdot r$	$3{,}13873241\cdot r^2$	$3{,}14302394\cdot r^2$
96	3⁰ 45′	176⁰ 15′	$r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$ $0{,}065438166\cdot r$	$\frac{1}{2}r\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$ $0{,}99946549\cdot r$	$2r\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}$ $0{,}065473221\cdot r$	$6{,}28206391\cdot r$	$6{,}28542920\cdot r$	$24r^2\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$ $3{,}13935020\cdot r^2$	$96r^2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}$ $3{,}14271460\cdot r^2$
102	3⁰ 31′ 45 $\frac{15}{17}$″	176⁰ 28′ 14 $\frac{2}{17}$″	$0{,}061590630\cdot r$	$0{,}99952571\cdot r$	$0{,}061619857\cdot r$	$6{,}28224428\cdot r$	$6{,}28522539\cdot r$	$3{,}13963234\cdot r^2$	$3{,}14261270\cdot r^2$
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
360	1⁰	179⁰	$0{,}017453071\cdot r$	$0{,}99996192\cdot r$	$0{,}017453736\cdot r$	$6{,}28310556\cdot r$	$6{,}28334481\cdot r$	$3{,}14143316\cdot r^2$	$3{,}14167241\cdot r^2$
1000	0⁰ 21′ 36″	179⁰ 38′ 24″	$0{,}00628\,31750\cdot r$	$0{,}999995065\cdot r$	$0{,}00628\,32060\cdot r$	$6{,}28317497\cdot r$	$6{,}28320598\cdot r$	$3{,}14157198\cdot r^2$	$3{,}14160299\cdot r^2$
21600	0⁰ 1′	179⁰ 59′	$0{,}00029\,088821\cdot r$	$0{,}9999999895\cdot r$	$0{,}00029\,088821\cdot r$	$6{,}28318528\cdot r$	$6{,}28318535\cdot r$	$3{,}141592610\cdot r^2$	$3{,}141592674\cdot r^2$
1296000	0⁰ 0′ 1″	179⁰ 59′ 59″	$0{,}00000\,48481\,36811\,090\cdot r$	$0{,}99999\,99999\,88\cdot r$	$0{,}00000\,48481\,36811\,105\cdot r$	$6{,}28318\,53071\,73\cdot r$	$6{,}28318\,53071\,92\cdot r$	$3{,}14159\,26535\,77\cdot r^2$	$3{,}14159\,26535\,96\cdot r^2$

(vergleiche Erkl. 102 in Sachs, Ebene Elementar-Geometrie, VIII. Teil.)

Diese Tabelle wird zum Preise von 50 ₰ auch einzeln abgegeben.

Verlag von **Julius Maier** in **Stuttgart**.

3) Ueber die Kreismessung oder Cyklometrie.

Frage 34. Was versteht man unter Kreismessung oder Cyklometrie?

Erkl. 106. Das Wort Cyklometrie ist die wörtliche Uebersetzung des Wortes Kreismessung ins Griechische (κύκλος = Kreis, μετρεῖν = messen). Mit dem Namen Rektifikation bezeichnet man allgemein die Angabe der Längeneinheiten einer krummen Linie, ausgedrückt im geradlinigen Längenmass (rectus = gerade). Man kann dabei denken an eine Ausziehung oder Ausstreckung der krummen Linie in gerader Richtung, ohne dass dabei (etwa durch Zerdehnung oder Verstreckung) ihre Länge geändert würde. — Die Messung der Flächeneinheiten heisst Quadratur, weil als Flächenmass ein Quadrat über der Längeneinheit benutzt wird, also Quadratmeter, Quadratcentimeter u. s. w.

Erkl. 107. Die nebenstehende Aufgabenstellung ist seit alters her in der Geometrie eingeführt und lässt sich in den beiden Formeln darstellen:

Kreisumfang $= x \cdot$ Durchmesser $= x \cdot 2r$,
Kreisfläche $= y \cdot$ Quadratradius $= y \cdot r^2$.

(Ueber die Zurückführung dieser beiden Aufgaben auf eine einzige von ihnen siehe später, Erkl. 128.)

Antwort. Unter der Aufgabe der Kreismessung versteht man eine doppelte Aufgabe, nämlich:

1) die Messung der Kreislinie (in Längeneinheiten), genannt Rektifikation des Kreises, und

2) die Messung der Kreisfläche (in Flächeneinheiten), genannt Quadratur des Kreises.

Im ersten Falle wird als Längeneinheit der Durchmesser des Kreises benützt, also das Verhältnis der Kreisperipherie zum Durchmesser $(2 \cdot r)$ gesucht. Im letzteren Falle wird als Flächeneinheit das Quadrat des Radius gesetzt, also das Verhältnis der Kreisfläche zum Quadrat des Radius gesucht.

Frage 35. Auf welchem Wege sucht man die Länge des Kreisumfangs?

Erkl. 108. Der nebenstehende Fall ist keineswegs der einzige, in welchem sich die Planimetrie einer Grenzbetrachtung mit unendlich kleinen Grössen bedient. Man vergl. z. B. die Aufstellung eines Verhältniswertes zweier inkommensurabeln Strecken im ersten Abschnitt des VI. Teiles dieses Lehrbuches.

Erkl. 109. Die nebenstehende Grenzbetrachtung wird auch an andern Stellen der geometrischen Wissenschaften für den Kreis, sowie andere krumme Linien häufig gebraucht. Dabei wird ein unendlich kleines Stück der krummen Linie als ein gerades Linienstück angesehen werden müssen, indem man dasselbe als Seite eines ein- oder umgeschriebenen Vielecks mit ausserordentlich hoher Seitenzahl betrachtet.

Erkl. 110. Für das Auge oder die zum Zeichnen benutzten Hilfsmittel ist eine dem nebenstehenden Satze genügende „Unendlichkeit“ schon bald erreicht. Nimmt man z. B. an, dass das Auge bei $\frac{1}{10}$ mm Seitenlänge die

Antwort. Um die Länge der Kreisperipherie zu finden, stellt man eine sog. Grenzbetrachtung an.

Man denkt sich nämlich zunächst die Seitenzahl eines dem Kreise eingeschriebenen regelmässigen Vielecks durch fortgesetzte Verdoppelung ins Unbegrenzte vermehrt: dann werden die einzelnen Seiten immer kleiner, und das Vieleck schmiegt sich von innen immer mehr und mehr an die Kreisperipherie an.

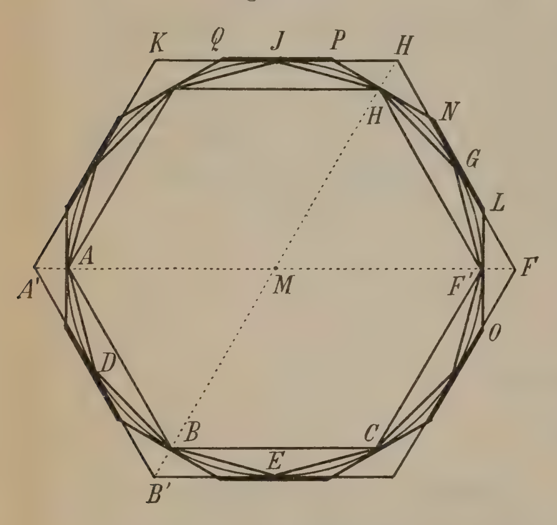
Denkt man sich sodann auch die Seitenzahl eines dem Kreise umgeschriebenen regelmässigen Vielecks durch fortgesetzte Verdoppelung unbegrenzt vermehrt, so werden auch hier die einzelnen Seiten immer kleiner, und das Vieleck schmiegt sich von aussen immer mehr an die Kreisperipherie an.

Umringe des Vielecks und des Kreises nicht mehr zu unterscheiden vermöge, so würde bei einem Radius von 1 cm schon das Vieleck von 360 Seiten oder bei dem in den beigegebenen Kreisfiguren gebrauchten Radius von etwa 3 cm schon das Vieleck von 1000 Seiten kaum mehr mit blossem Auge vom Kreise unterschieden werden; denn nach vorstehender Tabelle hätte das erstere 0,17, dass letztere 0,18 mm Seitenlänge.

Man kann daher die Kreislinie selber als gemeinsame Grenzfigur eines ein- und eines umgeschriebenen regelmässigen Vielecks mit unendlich grosser Seitenzahl ansehen.

Frage 36. Wie lässt sich die wachsende Annäherung der regelmässigen Vielecke an die Kreislinie geometrisch beweisen?

Figur 27.



Erkl. 111. Die Verdoppelung der Ecken geschieht beim ein- und umgeschriebenen Vieleck auf verschiedene Weise. Beim ersteren wird der Halbierungspunkt jedes ursprünglichen Bogens als Ecke hinzugenommen, beim letzteren wird im Halbierungspunkt jedes Bogens zwischen zwei ursprünglichen Berührungspunkten die Tangente hinzugenommen. Wenn daher, wie in Figur 27, die Seiten der beiden ursprünglichen Vielecke parallel waren, so ist dies bei den neu entstandenen nicht mehr der Fall.

Erkl. 112. Da die Tangentenabschnitte:

$$LG = LF', \; NG = NH' \text{ u. s. w.,}$$

so liegen die Punkte L, N auf den Halbierungslinien der Winkel GMF, GMH, nicht aber im Mittelpunkte der Strecken FG, GH. Vielmehr verhält sich (nach dem Satze des Apollonius in Frage 46 u. ff. des VI. Teiles dieses Lehrbuches):

$$GL:LF = MG:MF.$$

Nun ist aber in Figur 27 MG der kleine und

Antwort. Um die oben angeführte Grenzbetrachtung auch durch einen geometrischen Beweis zu stützen, denke man sich zu einem Kreis ein eingeschriebenes und das zugehörige umgeschriebene regelmässige Vieleck von beliebiger Seitenzahl n und verdoppele bei jedem derselben die Zahl der Ecken.

1) Dann ist der Umfang des eingeschriebenen n-Ecks gleich (siehe Fig. 27):

$$u_n = AB + BC + \cdots$$

und der des neuentstandenen eingeschriebenen $2n$-Ecks gleich:

$$u_{2n} = (AD + DB) + (BE + EC) + \cdots$$

Nun bilden aber die drei Punkte ABD, BCE u. s. w. jedesmal ein Dreieck; und hier gilt die Beziehung:

$$AD + DB > AB, \; BE + EC > BC \text{ u. s. w.,}$$

also ist auch:

$$u_{2n} > u_n.$$

2) Bei den umgeschriebenen Vielecken derselben Figur ist der Umfang des n-Ecks:

$$U_n = FH + HK + \cdots$$

und der Umfang des $2n$-Ecks:

$$U_{2n} = OL + \overline{LN} + NP + \overline{PQ} + \cdots$$

Lässt man den Umfang des n-Ecks ebenfalls bei O beginnen, so kann man für jenen schreiben:

$$U_n = (OF + FL) + \overline{LN} + (NH + HP) + \overline{PQ} + \cdot$$

Während also die Strecken LN, $PQ \cdots$ in beiden Umfängen enthalten sind, so treten beim $2n$-Eck je an Stelle der beiden Strecken:

$$OF + FL, \; NH + HP \cdots$$

des n-Ecks nur eine Strecke OL, $NP \cdots$ Und da die drei Strecken:

$$OF, \; FL, \; OL \text{ bezw. } NH, \; HP, \; NP \cdots$$

MF der grosse Radius des umgeschriebenen Sechsecks, also hat man:

$$GL:LF = \varrho_6 : r = \sqrt{3} : 2 = 0,866 : 1,$$

also ist L etwas näher bei G als bei F.

Erkl. 113. Dass $U >$ Peripherie $> u$ für jedes U und u mit gleicher Seitenzahl, ist eigentlich schon durch blosse Anschauung als selbstverständlich erkennbar. — Zum geometrischen Beweis für den ersten Teil $U >$ Peripherie zerlegt man U in Teilstücke, wie GHJ in Figur 27. Der Weg von G nach J über H auf den beiden geradlinigen Stücken GH und HJ ist offenbar länger als der stetig gekrümmte Weg auf dem Kreisbogen $GH'J$. — Für den zweiten Teil $u <$ Peripherie ist der Nachweis noch einfacher dadurch geliefert, dass der gerade Weg von A nach B kürzer ist als der krummlinige Weg auf dem Kreisbogen von A über D nach B.

Beide Teile ergeben sich übrigens auch ganz von selbst durch unbegrenzte Weiterführung der Ueberlegungen 1 und 2. Denn jeder folgende Umfang in der Reihe der eingeschriebenen Vielecke ist immer grösser, und die Kreislinie als regelmässiges Vieleck mit unendlicher Eckenzahl ist der letzte dieser Umfänge; und jeder folgende Umfang in der Reihe der umgeschriebenen Vielecke ist immer kleiner, und die Kreislinie ist auch von dieser Reihe das letzte Glied.

Erkl. 114. Die Ergebnisse der nebenstehenden Antwort finden ihre ziffernmässige Bestätigung in der Tabelle der Antwort 33, wie schon angedeutet wurde in Erkl. 104. U_n, beim Achteck noch $8r$, sinkt bis zum 96-Eck schon auf 6,285; u_n, beim Sechseck erst $6r$, steigt bis zum 96-Eck schon auf 6,282. Während also der Kreisumfang zuerst zwischen $6r$ und $8r$ eingeschlossen ist, ist er schon beim 60-Eck zwischen $6,280r$ und $6,288r$, beim 96-Eck zwischen $6,282r$ und $6,285r$. Die Verhältniszahl der Peripherie zum Durchmesser liegt also erst zwischen 3 und 4, dann zwischen 3,140 und 3,144, endlich zwischen 3,141 und 3,142. Sie heisst also sicher im ersten Fall 3,⋯, im zweiten 3,14⋯, im dritten Falle schon 3,141⋯

jeweils die Seiten eines Dreiecks bilden, so ist:

$$OF + FL > OL,\quad NH + HP > NP \text{ u. s. w.},$$

also auch:

$$U_{2n} > U_n.$$

3) Als dritter Punkt gesellt sich aber hiezu, dass doch stets:

$$U > \text{Peripherie} > u;$$

also erkennt man, dass bei unbegrenzt steigender Eckenzahl

der Umfang des eingeschriebenen regelmässigen Vielecks fortwährend zunimmt,

der Umfang des umgeschriebenen regelmässigen Vielecks fortwährend abnimmt, und dabei doch

der Umfang des eingeschriebenen stets kleiner bleibt, und der des umgeschriebenen stets grösser bleibt als die Kreisperipherie.

Dies ist aber nicht auf andere Weise möglich, als dass beide Umfänge einander immer näher und näher kommen und bei unendlich steigender Eckenzahl einem gemeinsamen Grenzwerte zustreben. Dieser gemeinsame Grenzwert ist sodann der Umfang des Kreises selbst, oder die Länge der Kreislinie.

Frage 37. Wie gross ist die Länge der Kreisperipherie?

Antwort. Berechnet man nebeneinander die Umfänge der eingeschriebenen und umgeschriebenen regelmässigen Vielecke von möglichst hoher Seitenzahl, so findet man dafür Vielfache von $2r$ in Zahlen, welche auf immer mehr und mehr Dezimalstellen gleichlauten. Auf so viele Stellen ist dann die richtige Zahl für den Umfang des Kreises sicher gefunden. Man benennt

Erkl. 115. Der Wert $2\pi r$ für die Länge des Kreisumfangs ist ein so sehr bekannter und so oft gebrauchter, dass derselbe auch in solchen Schulen oder Klassen gelehrt wird, welche von der wissenschaftlichen Herleitung dieses Wertes durchaus keine Kenntnis erhalten können. Obwohl daher für das praktische Leben, z. B. des Handwerkers, der Wert $2\pi r$ schon in Gewerbeschulen oder in unteren Klassen von Realanstalten den Schülern mitgeteilt wird, so ist

doch die wirkliche Begründung dieses Ausdruckes erst einem verhältnismässig späteren Kapitel der Planimetrie vorbehalten. Hier ist — auch wenn der Schüler durch eigene Rechnung nur ganz wenige Dezimalstellen von π selbständig ausrechnet — eine wirkliche Erkenntnis möglich über Entstehung dieses Wertes und über den Gedankengang bei seiner Entwicklung. Jene Mitteilung auf einer elementaren Unterstufe erzeugt dagegen bloss ein Hinnehmen auf Treu und Glauben, ein „iurare in verba magistri“.

Erkl. 116. Kein Studierender sollte versäumen, auch einmal die einfachste und roheste Bestimmung der Kreislänge dadurch vorzunehmen, dass er um einen gezeichnet vorliegenden Kreis einen Faden herumlegt und denselben dann mit dem Durchmesser des Kreises vergleicht. Dabei stellt sich heraus, dass auf der so gefundenen Umfangsstrecke der Durchmesser etwas mehr als dreimal enthalten ist. — Umgekehrt kann man auch einen Faden oder einen biegsamen Stab von der Länge des Durchmessers wiederholt nach einander auf die Peripherie des Kreises auflegen. Und man findet, dass nach dreimaligem Anlegen noch ein kleiner Rest des Umfangs unbedeckt bleibt.

Erkl. 117. Dem in Erkl. 116 angegebenen Verfahren entspricht eine schon aus der Bibel zu entnehmende Auswertung der Zahl π, nämlich $\pi = 3$. Im III. Buch der Könige, 7. Kapitel, 23. Vers, und im II. Buch der Chronik, 4. Kapitel, 2. V., wird nämlich beim Palastbau bezw. Tempelbau des Salomo (1000 v. Chr.) berichtet von einem „ringsherum runden“, also kreisförmigen Wasserbehälter (genannt „Meer“): „Es war von einem Rand zum andern zehn Ellen weit“ — „und ein Band von dreissig Ellen ging in die Runde um dasselbe herum.“ — Uebrigens ist dies weder der genaueste noch der älteste Wert für π aus dem Altertum, denn schon aus einer um 2000 v. Chr. geschriebenen Schrift ergibt sich der weit genauere Wert $\pi = 3{,}16$.

Erkl. 118. Die von Archimedes und von Metius herrrührenden Werte $\frac{22}{7}$ und $\frac{355}{113}$ sind dadurch besonders ausgezeichnet, dass sie zusammenfallen mit dem zweiten und vierten derjenigen sog. Näherungswerte von π, welche durch Entwicklung in Kettenbruchform entstehen. Diese sind nämlich:

$$\frac{3}{1},\quad \frac{22}{7},\quad \frac{333}{106},\quad \frac{355}{113},\quad \frac{103\,993}{33\,102},\quad \frac{104\,348}{33\,215}.$$

Es gibt daher keinen gemeinen Bruch mit kleinerem Nenner als 7 bezw. 106, 113, 33 102 oder 33 215, welcher dem wahren Werte von π näher kommt als eben die vorstehenden Brüche, darunter $\frac{22}{7}$ und $\frac{355}{113}$.

Erkl. 119. Dass die Dezimalbruchentwicklung für π ins Unendliche geht ohne je abzu-

diese richtige Zahl mit dem griechischen Anfangsbuchstaben des Wortes Peripherie, nämlich π. Und man hat also:

$$\text{Kreisperipherie} = \pi \cdot \text{Durchmesser} = 2\pi r.$$

Der Wert der Zahl π ist festgelegt, ähnlich wie oben,

durch das 60-Eck (aus dem 15-Eck) $\pi = 3{,}14\cdots$

durch das 192-Eck (aus dem 6-Eck) $\pi = 3{,}141\cdots$

durch das 480-Eck (aus dem 15-Eck) $\pi = 3{,}1415\cdots$ oder $3{,}1416\cdots$

durch das 20480-Eck (aus dem 10-Eck) $\pi = 3{,}1415926\cdots$

durch das Vieleck von 32 212 254 720 Ecken ($15 \cdot 2^{31}$, also aus dem 15-Eck) $\pi = 3{,}14159\;26535\;89793\;23846$ oder $3{,}14159\cdots 23847$, also wenn man mit der 19. Stelle abbricht:

$$\pi = 3{,}14159\cdots 2385.$$

Die letztere Rechnung samt einigen noch genaueren (bis auf 35 Stellen) ist angestellt worden 1621 von Ludolph van Ceulen; und nach ihm wird die Zahl π oft auch die Ludolphsche Zahl genannt.

Ein anderer bekannter Wert für π ist der von Archimedes († 212 v. Chr.) durch das 96-Eck (aus dem 6-Eck) abgeleitete:

$$\pi = 3\frac{1}{7} = \frac{22}{7} = 3{,}142.$$

Und ferner ist um 1600 von Adrian Anthonisz (Metius) der Wert angegeben:

$$\pi = 3\frac{16}{113} = \frac{355}{\underline{113}} = 3{,}1415929,$$

welcher besonders leicht auswendig zu behalten ist durch die Ziffernfolge 113 355, von der die ersten drei im Nenner, die andern im Zähler stehen.

In neuerer Zeit und mit andern Mitteln hat man den Wert von π auf 200, ja 500 und sogar 707 Stellen genau berechnet. Eine solche Entwicklung liefert folgende 240 Stellen für π:

brechen oder eine Periode zu liefern, ist eine Thatsache, deren Untersuchung seit Jahrhunderten, ja man könnte sagen seit Jahrtausenden, den Gegenstand mathematischer Ueberlegungen gebildet hat. Wäre nun π eine Zahl wie etwa:

$$\sqrt{10} = 3{,}162 \cdots,$$

die ebenfalls ins Unendliche fortgeht, so wäre eine Konstruktion mit Lineal und Zirkel für Kreisumfang (bezw. Kreisfläche) immerhin möglich: π wäre eine algebraisch irrationale Zahl. Aber dies ist nicht der Fall, denn π ist eine Zahl, die auch gar nicht als Lösung einer algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten auftreten kann: π ist eine transcendent irrationale Zahl.

Erkl. 120. Der Beweis für die „transcendentale Irrationalität“ der Zahl π ist zum erstenmale gelungen im Jahre 1882, und zwar auf rein analytischem Wege unter Anknüpfung an die vielleicht merkwürdigste aller Gleichungen:

$$e^{i\pi} = -1.$$

Mit dieser Grossthat auf mathematischem Gebiete ist durch F. Lindemann eine Aufgabe im negativen Sinne abgeschlossen und ein Problem endgiltig aus der Welt geschafft, an dem sich Mathematiker und Dilettanten in grosser Zahl versucht haben. Ja man kann seit 1882 jeden geradezu einen Thoren nennen, der jetzt noch die „Quadratur des Zirkels“ im althergebrachten Sinne dieses Wortes zu leisten sich unterfangen wollte.

π = 3,14159 26535 89793 23846 26433 83279
50288 41971 69399 37510 58209 74944
59230 78164 06286 20899 86280 34825
34211 70679 82148 08651 32823 06647
09384 46095 50582 23172 53594 08128
48111 74502 84102 70193 85211 05559
64462 29489 54930 39196 44288 10975
66593 34461 28475 64823 37867 83165
.....

Für die praktische Benützung haben diese vielen Dezimalstellen selbstverständlich durchaus keinen Wert. Man bedient sich je nach der erforderlichen Genauigkeit der Werte 3,14 oder $\frac{22}{7}$ oder auf 4, 5, 6 oder 7 Stellen des Wertes 3,1415926.

Frage 38. Welche Länge hat ein Kreisbogen von gegebenem Centriwinkel?

Erkl. 121. Lehrsatz 19 des II. Teiles dieses Lehrbuches hiess: „Zu gleichen Mittelpunktswinkeln eines Kreises gehören gleiche Bogenstücke;“ und Satz 21 daselbst: „Die Anzahl von Bogengraden eines Kreisbogens ist gleich der Anzahl von Winkelgraden seines Mittelpunktswinkels.“

Erkl. 122. Da die Länge des Halbkreises von 180 Bogengrad π mal die Länge des Radius hat, so gebraucht man auch häufig den Buchstaben π für 180^0, besonders wenn die Länge des Radius = 1 gesetzt wird. Solches geschieht besonders häufig in der Trigonometrie und in der höheren Analysis, wo die Bezeichnung π für Sprache und Schrift eine willkommene Abkürzung ist für „hundertundachtzig Grad“.

Antwort. Da zu gleichen Mittelpunktswinkeln gleiche Kreisbogen gehören, so wird durch die Winkelteilung des Vollwinkels am Kreismittelpunkt auch die Peripherie in 360 gleiche Teile von je einem Bogengrad geteilt. Und der Bogen von 360 Bogengraden hat die Länge:

$$2\pi r = u,$$

der Bogen von 1 Bogengrad hat die Länge:

$$\frac{2\pi r}{360} \text{ oder } \frac{\pi r}{180},$$

ein Bogen von α Bogengraden hat die Länge:

$$\frac{\pi r}{180}\cdot\alpha = \frac{\alpha}{360}\cdot u.$$

Daher ist z. B. der Halbkreis π mal so gross als der Radius; ein Viertelskreis ist $\frac{\pi}{2} = 1{,}5708$ mal so gross als der Schenkel des zugehörigen rechten Winkels; der Bogen von 1^0 ist gleich:

$$\frac{\pi}{180}\cdot r = 0{,}0174533\cdot r,$$

der Bogen von 1′ ist gleich:

$$\frac{\pi}{180\cdot 60}\cdot r = 0{,}0002909\cdot r,$$

der Bogen von 1″ gleich:

$$\frac{\pi}{180\cdot 60\cdot 60}\cdot r = 0{,}000004848\cdot r;$$

allgemein:

$$\underline{\text{Kreisbogen} = \pi r\cdot\frac{\text{Centriwinkel}^0}{180^0}} = \frac{2\pi r}{360^0}\cdot\text{Centriwinkel}^0,$$

ausgedrückt in Längeneinheiten, wie r.

Frage 39. Welchen Centriwinkel bestimmt ein Kreisbogen von gegebener Länge?

Antwort. Man hat genau die umgekehrte Schlussfolge wie in voriger Antwort:

Zur Bogenlänge $2\pi r$ gehört ein Winkel von 360°, zur Bogenlänge 1 gehört ein Winkel von:

$$\frac{360^0}{2\pi r} \text{ oder } \frac{180^0}{\pi r},$$

zur Bogenlänge b gehört ein Winkel von $\frac{180^0}{\pi r}\cdot b$, allgemein:

$$\underline{\text{Centriwinkel}^0 = \frac{\text{Kreisbogen}}{\pi r}\cdot 180^0}$$

$$= \frac{360^0}{2\pi r}\cdot\text{Kreisbogen},$$

ausgedrückt in Winkeleinheiten.

Wenn daher ein Kreisbogen die Länge r hat, so ist der zugehörige Centriwinkel:

$$\frac{180^0}{\pi} = 57^0\,17'\,44{,}8''$$

$$= 57{,}2958^0 = 3437{,}75' = 206264{,}8''.$$

Zu einem Kreisbogen von der Länge des Durchmessers gehört der doppelte Winkel, nämlich:

$$\frac{360^0}{\pi} = 114^0\,35'\,29{,}6''$$

$$= 114{,}5916^0 = 6875{,}50' = 412529{,}6''.$$

Für die Verwandlungen der Bogenmasse in Winkelmasse und umgekehrt hat man besondere Tafeln aufgestellt, welche mit den logarithmischen Tafeln vereinigt zu sein pflegen.

Erkl. 123. Die vorliegende Frage könnte auch so gefasst werden: Wieviel Bogengrade überdeckt ein um den Kreis gelegter Faden von gegebener Länge b? — Diese Frage ist von besonderer Wichtigkeit für die höhere Analysis. Dort wird nämlich weniger mit Graden, Minuten und Sekunden gerechnet, sondern statt dessen mit den Bogenlängen. Um daher solche Formeln in die gewöhnliche Schreibweise zu übersetzen, braucht man die beiden Verwandlungsformeln der Antworten 38 und 39.

Erkl. 124. Mittels der nebenstehenden Antwort kann man die zweite der in Erkl. 116 angegebenen Bestimmungen genau nachrechnen: Die erstmalige Anlegung des Fadens von Durchmesserlänge umfasst 114,5916°, das zweitemal kommt man bis 229,1832°, das drittemal bis 343,7748°; es bleiben also bis zu 360° noch ungedeckt 16,2252°, nämlich $(\pi - 3)$ Durchmesserlängen $= 0{,}14159\cdot 2r$, ungefähr ein Siebtel des Durchmessers.

Frage 40. Auf welchem Wege findet man den Inhalt der Kreisfläche?

Antwort. Zur Bestimmung der Kreisfläche stehen zweierlei Wege zur Verfügung:

A) Da die Flächeninhalte der eingeschriebenen regelmässigen Vielecke bei

Erkl. 125. Dass die Flächeninhalte der eingeschriebenen Vielecke stets kleiner, die der umgeschriebenen stets grösser bleiben als die

Kreisfläche, geht schon aus dem Namen hervor, denn zwischen Sehne und Kreis bleibt ein innerer Raum frei, zwischen Tangente und Kreis bleibt ein äusserer Raum frei. — Wird die Eckenzahl eines eingeschriebenen regelmässigen Vielecks verdoppelt, so wird über jeder Sehne eine Dreiecksfläche zugesetzt; wird die Eckzahl eines umgeschriebenen regelmässigen Vielecks verdoppelt, so wird in jedem Tangentenwinkel eine Dreiecksfläche weggenommen (vergl. Fig. 27): also muss bei wachsender Eckenzahl die Fläche der eingeschriebenen Vielecke zunehmen, die der umgeschriebenen abnehmen.

Erkl. 126. Ein Blick auf die Tabelle in Antwort 33 zeigt, dass die Ziffern bei f und F einander etwas langsamer entgegenkommen als die bei u und U, und dass dabei wieder die Faktoren bei F der Zahl π sich rascher nähern als die Faktoren bei f. Daher wäre noch beim regelmässigen Vieleck von 102 Seiten die Kreisfläche erst zwischen $3{,}139r^2$ und $3{,}142r^2$ begrenzt, und man müsste weit höhere Seitenzahlen in Rechnung ziehen, um überhaupt sicher festzustellen, dass dieselbe Zahl π entsteht wie beim Umfang. Dies wird ohne weiteres sicher festgestellt durch die zweite der nebenstehenden Ueberlegungen.

Erkl. 127. Die zweite Ueberlegung ist eine Anwendung des Satzes 8 im V. Teile dieses Lehrbuches; derselbe heisst: Der Inhalt eines einem Kreise umgeschriebenen Vielecks ist gleich dem halben Produkt aus dem Radius des Inkreises und dem Umfange des Vielecks. Im vorliegenden Falle ist der Radius des Inkreises r selbst, der Umfang gleich der Kreisperipherie, also $2\pi r$, folglich die Kreisfläche:

$$\frac{1}{2}\cdot r\cdot 2\pi r = \pi r^2.$$

Erkl. 128. Die erste der nebenstehenden Ueberlegungen findet die Kreisfläche selbständig und unabhängig vom Kreisumfang, die zweite führt die Quadratur des Kreises auf die Rektifikation zurück, was eine Vereinfachung des Problems bildet. Diese nicht zu unterschätzende Erleichterung hat schon Archimedes († 212 v. Chr.) gefunden; er sprach sie aus in der Form: „Die Fläche des Kreises ist gleich der Fläche eines Dreiecks, dessen Grundseite gleich dem Umfang des Kreises und dessen Höhe der Radius ist.“ In der That ist der Inhalt eines solchen Dreiecks:

$$\frac{u\cdot r}{2} = \frac{2\pi r^2}{2} = \pi r^2.$$

Erkl. 129. Durch diese Zurückführung der Quadratur des Kreises auf die Rektifikation desselben ist aus zwei wichtigen Aufgaben eine einzige gemacht, und deswegen konnte auch oben in Erkl. 120 gesagt werden, dass mit der Festlegung der Zahl π auch das schon Jahrhunderte alte Problem von der „Quadratur des Zirkels“ endgiltig erledigt sei.

wachsender Eckenzahl stets zunehmen, aber doch immer kleiner bleiben als der Kreisinhalt — und da die Flächeninhalte der umgeschriebenen regelmässigen Vielecke bei wachsender Eckenzahl stets abnehmen, aber doch immer grösser bleiben als die Kreisfläche — so erkennt man, dass auch diese beiden Reihen einem gemeinsamen Grenzwert zustreben, nämlich dem Inhalte des Kreises. In der That erhält man, wie die frühere Tabelle zeigt, für f stets wachsende, für F stets abnehmende Werte als Vielfache von r^2, deren Zahlenfaktoren auf mehr und mehr Dezimalstellen übereinstimmen, also mit stets wachsender Genauigkeit den wahren Flächeninhalt des Kreises angeben. Dieser Zahlenfaktor ist aber, wie aus der Tabelle in Antwort der Frage 33 hervorgeht, kein anderer als die Zahl π.

B) Eine einfachere Bestimmung des Flächeninhalts der Kreislinie erhält man durch die unmittelbare Auffassung der Kreislinie als eines umgeschriebenen Vielecks von unendlich hoher Seitenzahl. Denkt man sich dann den Mittelpunkt mit jedem der unendlich vielen und unendlich benachbarten Eckpunkte verbunden, so bilden je zwei benachbarte Radien ein Dreieck mit einem unendlich kleinen und deshalb als geradlinig zu betrachtenden Stücke g der Peripherie als Grundseite. Die Höhe jedes dieser unendlich schmalen Dreieckchen ist gleich dem Radius des Kreises, folglich die Dreiecksinhalte:

$$\frac{r}{2}\cdot g_1,\quad \frac{r}{2}\cdot g_2\cdots$$

und deren Summe, also die Kreisfläche, gleich:

$$\frac{r}{2}(g_1+g_2+g_3+\cdots)$$

Nun bildet aber die Summe dieser g nichts anderes als den Umfang des Kreises, und ist gleich $2\pi r$, also ist die Kreisfläche gleich:

$$\frac{r}{2}\cdot 2\pi r \quad \text{oder} \quad \pi r^2$$

(vgl. Satz 8 im V. Teile dieses Lehrbuches).

Erkl. 130. Man achte darauf, dass $2\pi r$ eine Längengrösse, πr^2 eine Flächengrösse ist. In welcher Masseinheit beide auszudrücken seien, zeigt die Messung des Radius. Ist der Radius in Metern gegeben, so hat man den Umfang in Metern, die Fläche in Quadratmetern; Radius in dm bezw. cm oder mm liefert auch Umfang in dm, Fläche in qdm bezw. Umfang in cm, Fläche in qcm, oder Umfang in mm, Fläche in qmm.

Erkl. 131. Um beim Auswendigbehalten die sonst häufige Verwechslung der beiden Formeln $2\pi r$ und πr^2 zu vermeiden, mag man sich an die etwas gewöhnliche Gedächtnisregel halten, dass in jeder Formel einmal die Zahl 2 auftritt: das einemal als Faktor, das anderemal als Exponent. Und zwar muss 2 dort als Exponent auftreten, wo Quadratmasse, nämlich Flächenmasse erscheinen. — Gleichwertig sind die Ausdrucksweisen $2\pi r$ und πr^2 einerseits oder $2r\pi$ und $r^2\pi$ andererseits. Denn entweder stellt man beidemale den reinen Zahlenfaktor voran, oder man setzt beidemale die transcendent irrationale Grösse an den Schluss. Beide Arten haben ihre Berechtigung und ihre Anwendungen (z. B. $s_8 = 0{,}765367 \cdot r$ oder $s_8 = r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}$).

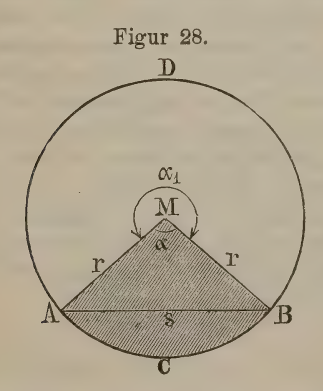
Man kann daher die Antworten der Fragen 37 und 40 zusammenfassen zu der Aussage:

Satz 5. Der Umfang des Kreises hat $2\pi r$ Längeneinheiten; der Inhalt des Kreises hat πr^2 Flächeneinheiten; wobei:

$$\pi = 3{,}14 \text{ oder } \frac{22}{7} \text{ oder } 3{,}1415926536.$$

Frage 41. Was versteht man unter einem Kreissektor oder Kreisausschnitt?

Figur 28.



Erkl. 132. Die beiden Radien MA und MB in Figur 28 begrenzen zwei verschiedene Kreisbogen, ACB und ADB, folglich zeigt Fig. 28 auch zwei verschiedene Kreissektoren, nämlich $ACBMA$ und $ADBMA$. Die Centriwinkel α und α_1 derselben ergänzen einander zu 360^0; zum Centriwinkel α gehört nur der Sektor $ACBMA$.

Antwort. Unter einem Kreissektor oder Kreisausschnitt versteht man ein Stück einer Kreisfläche, welches begrenzt wird von zwei Radien und einem der beiden von ihnen begrenzten Bogenstücke, also denjenigen Teil der Kreisfläche, welcher von den Schenkeln eines Centriwinkels und dem zu diesem Centriwinkel zugehörigen Kreisbogen begrenzt wird.

Frage 42. Welche Fläche hat ein Kreissektor von gegebenem Centriwinkel und umgekehrt?

Antwort. Da durch die Winkelteilung des Vollwinkels am Kreismittel-

Erkl. 133. Ist von den zwei Kreissektoren der Figur 28 der eine gleich $\frac{\pi r^2}{360}\cdot\alpha$, so ist der andere $\frac{\pi r^2}{360}\cdot\alpha_1$ und beide zusammen:

$$\frac{\pi r^2}{360}(\alpha+\alpha_1)=\frac{\pi r^2}{360}\cdot 360=\pi r^2;$$

denn da die beiden Centriwinkel einander zu 360° ergänzen, so müssen sich die beiden Sektoren zur vollen Kreisfläche ergänzen.

Erkl. 134. Die Fläche des Halbkreises ist:

$$\frac{1}{2}\pi r^2=1{,}5708\,r^2,$$

jene des Quadranten ist:

$$\frac{1}{4}\pi r^2=0{,}7854\,r^2;$$

der Centriwinkel zu einem Kreisbogen von Fläche $1r^2$ ist:

$$\frac{360^0}{\pi}=114^0\,35'\,39{,}6''$$
$$=114{,}5916^0=6875{,}50'=412529{,}6''.$$

Erkl. 135. Die nebenstehenden Formeln entstehen auch direkt durch unmittelbare Anwendung der in Antwort 40 angewandten Summierung der Dreieckchen:

$$\frac{r}{2}g_1+\frac{r}{2}g_2+\cdots$$

bis zu einer solchen Summe, dass $g_1+g_2+\cdots$ gleich dem zum Sektor gehörigen Kreisbogen wird, also gleich $\frac{\pi r}{180}\cdot\alpha$. Dann ist Sektor:

$$=\frac{r}{2}\cdot\frac{\pi r}{180}\cdot\alpha=\frac{\pi r^2}{360}\cdot\alpha.$$

Und ähnlich der Ausdrucksweise in Erkl. 128 kann man aussagen: „Der Sektor ist gleich einem Dreieck, dessen Grundseite gleich dem zum Sektor gehörigen Kreisbogen und dessen Höhe der Radius ist.“

punkt auch die Kreisfläche in 360 gleiche Teile geteilt wird, so kommt:

auf 360° Centriwinkel die Fläche πr^2,

auf 1° Centriwinkel die Fläche $\frac{\pi r^2}{360}$,

auf α^0 Centriwinkel die Fläche $\frac{\pi r^2}{360}\cdot\alpha$;

oder allgemein:

$$\text{Kreissektor}=\pi r^2\cdot\frac{\text{Centriwinkel}^0}{360^0}$$
$$=\frac{\pi r^2}{360}\cdot\text{Centriwinkel},$$

ausgedrückt in Flächeneinheiten, wie r^2.

Und umgekehrt hat man:

$$\text{Centriwinkel}^0=\frac{\text{Kreissektor}}{\pi r^2}\cdot 360^0$$
$$=\frac{360}{\pi r^2}\cdot\text{Kreissektor},$$

ausgedrückt in Winkeleinheiten.

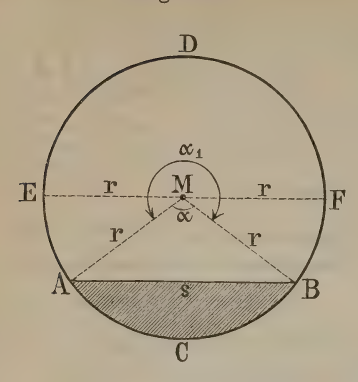
Frage 43. Was versteht man unter einem Kreissegment oder Kreisabschnitt?

Antwort. Unter einem Kreissegment oder Kreisabschnitt versteht man ein Stück einer Kreisfläche, welches begrenzt wird von einer Sehne und einem der beiden von ihr abgetrennten Bogenstücke, also denjenigen Teil der Kreisfläche, welcher begrenzt wird von der Sehne eines Centriwinkels und dem zu dem Centriwinkel gehörigen Kreisbogen.

Dieser Centriwinkel heisst auch der „zum Segmente gehörige“ Centriwinkel, und umgekehrt heisst der Kreisabschnitt

Erkl. 136. Die Sehne AB in Figur 29 trennt zwei verschiedene Kreisbogen, ACB und ADB, folglich zeigt Figur 29 auch zwei verschiedene Kreissegmente, nämlich $ACBA$ und $ADBA$, ersteres kleiner, letzteres grösser als der Halbkreis $EMFDE$ und zwar je um dasselbe Stück $ABFE$. Die Centriwinkel α und α_1 derselben ergänzen einander zu 360°, die beiden Segmente ergänzen einander zum ganzen Kreis $r^2\pi$; zum Centriwinkel α gehört nur das Segment $ACBA$.

Figur 29.



das „zum Centriwinkel gehörige“ Segment, obwohl seine Fläche nicht bis zum Scheitel dieses Winkels hineinragt.

Erkl. 137. Die Worte Sektor und Segment kommen beide von dem lateinischen Verbum secare = schneiden, nämlich das erstere von Supinum sectum: sector, das letztere mit der Anhängesilbe — mentum, also eigentlich secamentum. Beim Wegfall des Vokals a muss dann in secmentum das c vor m in g verwandelt werden, also segmentum.

Frage 44. Wie wird die Fläche eines Kreissegmentes gefunden?

Erkl. 138. Die Bestimmung des zum Segment gehörigen Sektors ist auf Grund der vorhergehenden Antworten möglich aus r und α; zur Bestimmung des Dreiecks AMB bedarf es aber der Kenntnis der zugehörigen Sehne s. Dann ist die Höhe dieses Dreiecks:

$$\sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}$$

und der Inhalt des Dreiecks:

$$\frac{s}{2}\sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}} = \frac{s^2}{4}\sqrt{\left(\frac{2r}{s}\right)^2 - 1}.$$

Demnach wäre der Inhalt des Segments mit Centriwinkel α und Sehne s:

$$\text{Segment} = \frac{\pi r^2}{360}\cdot\alpha \mp \frac{s^2}{4}\sqrt{\left(\frac{2r}{s}\right)^2 - 1},$$

ausgedrückt in Flächeneinheiten.

Erkl. 139. Man sieht, dass in der eben abgeleiteten Formel ausser den Bestimmungsstücken r und α auch noch s vorkommt, während doch durch r und α das Segment vollständig bestimmt ist. Es muss also s durch r und α auszudrücken sein, so dass in der Formel nur noch diese zwei Bestimmungsstücke stehen bleiben. Dies ist aber mit den Hilfsmitteln der elementaren Planimetrie nicht möglich, geschieht vielmehr nur vermittelst der Trigonometrie. Man erhält nämlich dort:

$$s = 2r\sin\frac{\alpha}{2},$$

so dass aus obiger Formel entsteht:

$$\text{Segment} = \frac{\pi r^2}{360}\alpha \mp r^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} - 1}$$

$$= \frac{\pi r^2}{360}\alpha \mp r^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}}.$$

Antwort. Um die Fläche eines Kreissegmentes zu finden, zieht man die beiden zugehörigen Radien MA und MB in Figur 30 und führt so die Bestimmung des Segmentes auf jene des Sektors zurück. Es entsteht nämlich durch das Dreieck MAB die Beziehung:

Segment $ACBA$
= Sektor $ACBMA$ — Dreieck MAB

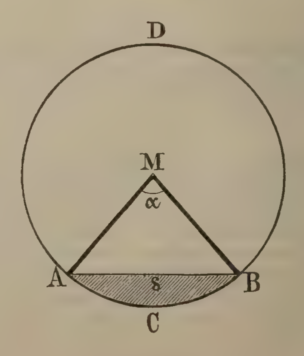
bezw.:

Segment $ADBA$
= Sektor $ADBMA$ + Dreieck MAB

oder:

Segment $ADBA$
= Kreisfläche — Segment $ACBA$.

Figur 30.

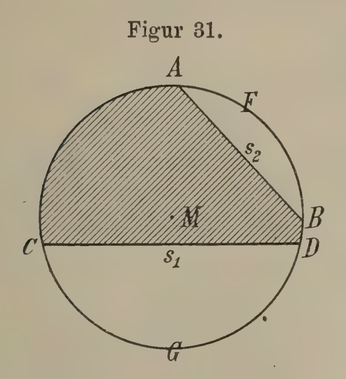


Nun ist aber $\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \cos\frac{\alpha}{2}$ und $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\alpha$, also wird:

$$\text{Segment} = \frac{\pi r^2}{360}\alpha \mp \frac{r^2\sin\alpha}{2} = \frac{r^2}{2}\left\{\frac{\alpha}{360}\cdot 2\pi - \sin\alpha\right\}.$$

Frage 45. Wie bestimmt man ein Flächenstück zwischen zwei beliebigen Sehnen eines Kreises?

Figur 31.



Antwort. Um das von den Sehnen s_1 und s_2 begrenzte Flächenstück $ABCD$ des Kreises in Figur 31 zu bestimmen, verfährt man am einfachsten so, dass man die beiden Segmente dieser Sehnen bestimmt und beide von der gesamten Kreisfläche abzieht, also:

Flächenstück $ABCD$
= Kreisfläche — (Segm. ABF + Segm. CDG)

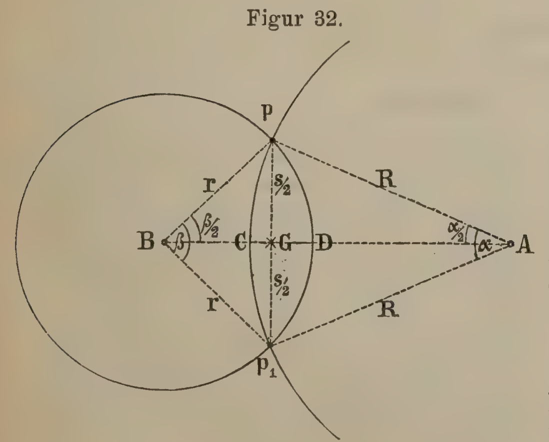
Erkl. 140. Zur numerischen Berechnung des Flächenstückes $ABCD$ wären als Bestimmungsstücke erforderlich entweder r mit s_1 und s_2 oder r mit α_1 und α_2, wobei:

$$\alpha_1 = \sphericalangle CMD, \quad \alpha_2 = \sphericalangle AMB$$

die zu den Sehnen s_1 und s_2 gehörigen Centriwinkel wären. Im planimetrischen Ausdruck kämen $s_1 s_2$ und $\alpha_1 \alpha_2$ nebeneinander vor, mit trigonometrischen Hilfsmitteln könnten $s_1 s_2$ und $\alpha_1 \alpha_2$ gegenseitig ersetzt werden.

Frage 46. Wie bestimmt man das zwei schneidenden Kreisen gemeinsame Flächenstück?

Figur 32.



Antwort. Um das Flächenstück PCP_1DP in Figur 32 zu bestimmen, ziehe man die Radien:

$$PA = P_1A = R \text{ und } PB = P_1B = r,$$

sowie die gemeinsame Sehne $PP_1 = s$ der beiden Kreise. Dann ist das gesuchte Flächenstück zu erhalten als Summe der beiden Segmente PCP_1P und PDP_1P, von denen das erstere dem Kreise um A mit dem Centriwinkel α und Sehne s angehört, das zweite dem Kreise um B mit dem Centriwinkel β und derselben Sehne s.

Erkl. 141. Zur numerischen Berechnung setzt man: Segment PCP_1P = Sektor $APCP_1$ — Dreieck APP_1 und Segment $PDPP_1$ = Sektor $BPDP_1$ — Dreieck BPP_1, also die gesuchte Fläche:

$$PCP_1DP = \frac{\pi R^2\cdot\alpha}{360} - \frac{s^2}{4}\sqrt{\left(\frac{2R}{s}\right)^2-1} + \frac{\pi r^2\cdot\beta}{360} - \frac{s^2}{4}\sqrt{\left(\frac{2r}{s}\right)^2-1}$$

$$= \frac{\pi}{360}(R^2\cdot\alpha + r^2\cdot\beta) - \frac{s^2}{4}\left[\sqrt{\left(\frac{2R}{s}\right)^2-1} + \sqrt{\left(\frac{2r}{s}\right)^2-1}\right].$$

---

4) Ueber Kreise als ähnliche Figuren.

Frage 47. Welcher Schwierigkeit begegnet die Anwendung des gewöhnlichen Begriffs von der Aehnlichkeit der Figuren auf die Kreise?

Antwort. Der gewöhnliche Aehnlichkeitsbegriff beruht auf der Gleichheit entsprechender Winkel und der Proportionalität entsprechender Strecken; nun besitzt aber der Kreis nur eine einzige unabhängige oder willkürliche Streckengrösse, nämlich den Radius, und keinerlei charakteristische Winkelgrössen.

Man benutzt daher zur Untersuchung der Aehnlichkeit von Kreisen die allgemeinere Definition; wonach die Aehnlichkeit zweier Figuren dadurch bestimmt wird, dass man die Figuren in die sog. „ähnliche Lage" bringen kann.

Man wird hiernach zwei Kreise dann als ähnlich bezeichnen müssen, wenn sie sich in eine Lage bringen lassen, dass die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte durch einen Punkt gehen, und dass die Abstände solcher entsprechenden Punkte von dem Scheitel stets ein bestimmtes gleichbleibendes Verhältnis aufweisen.

Erkl. 142. Vor dem Studium dieses Abschnittes wiederhole man, was im Abschnitt 3 und 5 des vorigen VII. Teiles dieses Lehrbuches „über die Anwendung der Aehnlichkeit auf das allgemeine Dreieck und das allgemeine Vieleck" gesagt worden ist, indem der vorliegende Teil mit seinen Betrachtungen sich eng an jenen anschliesst und auf demselben aufgebaut wird.

Erkl. 143. Die Eigenschaft des Kreises, dass durch eine einzige Streckengrösse die ganze Figur eindeutig bestimmt ist, besitzen ausserdem auch Figuren, wie das gleichseitige Dreieck, das Quadrat, allgemein alle regelmässigen Vielecke. Indem man daher den Kreis als ein regelmässiges Vieleck von unendlich hoher Seitenzahl betrachtet, kann man den Satz 16a des VII. Teiles dieses Lehrbuches auch auf den Kreis anwenden, und behaupten, dass wie alle regelmässigen Vielecke gleicher Seitenzahl, so auch alle Kreise ähnlich seien.

Erkl. 144. Ueber die im nebenstehenden benutzte verallgemeinerte Auffassung der Aehnlichkeit zweier Figuren wurde zum erstenmale gesprochen in der Erkl. 60 zu Antwort 22 des vorigen VII. Teiles dieses Lehrbuches; weitere Ausführung darüber erfolgte in Antwort 41 bis 49 desselben Teiles.

Frage 48. Wie wird man auf Grund der vorigen Ueberlegung zwei Kreise auf Aehnlichkeit untersuchen?

Antwort. I. Um zwei Kreise (um M_1 und M_2 in Figur 33) auf ihre Aehnlichkeit zu untersuchen, zieht man in jedem Kreis zunächst zwei beliebige parallele und gleichgerichtete Radien $M_1P_1 \parallel M_2P_2$ und verbindet deren Endpunkte. Dadurch entsteht ein Schnittpunkt S auf der Centralen M_1M_2 mit P_1P_2. Nun sind in den Dreiecken SM_1P_1 und SM_2P_2 die Winkel bei S gemeinsam, und jene bei M und P sind je als korrespondierende Winkel gleichgross, folglich ist:

$$\triangle SM_1P_1 \sim SM_2P_2,$$

also:

$$SM_1 : SM_2 = SP_1 : SP_2 = M_1P_1 : M_2P_2 = r_1 : r_2$$

II. Zieht man ein beliebiges zweites Paar paralleler und gleichgerichteter

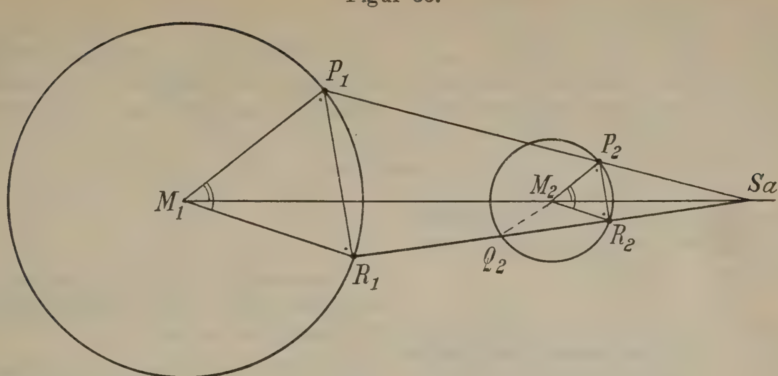
Erkl. 145. Die parallelen Radien gehen aus von den Punkten M_1 und M_2. Dieselben können aber dabei immer noch gleichgerichtet (beide nach oben in Figur 33) oder entgegengesetzt gerichtet sein (der eine nach oben, der andere nach unten, wie später in Figur 34). Beide Beziehungen sind gleichberechtigt und liefern analoge Ergebnisse.

Erkl. 146. Dass die Punkte S und S' im I. und II. Teile nebenstehender Ueberlegungen dieselben Punkte sein müssen, folgt aus der Proportion:

$M_1S : M_2S = r_1 : r_2$ und $M_1S' : M_2S' = r_1 : r_2$.

Denn hiernach ist S bezw. S' der Punkt, welcher die Centralstrecke M_1M_2 äusserlich teilt im Verhältnis der Radien $r_1 : r_2$. Nun gibt es aber nur einen einzigen Punkt für jedes Teilungsverhältnis, also müssen S und S' zusammenfallen.

Figur 33.



Erkl. 147. Die Aehnlichkeit der Dreiecke SMP bezw. SMR im I. und II. Teile nebenstehender Antwort findet statt nach dem vierten Aehnlichkeitssatz wegen Gleichheit der drei Winkel; die Aehnlichkeit der Dreiecke SMR im III. Teil dagegen nach dem dritten Aehnlichkeitssatz und zwar in dessen spezialisierter Form, wie sie im Satz 4d in Antwort 8 des vorigen VII. Teiles dieses Lehrbuches angegeben wurde: Bei der allgemeinen Untersuchung der Fig. 33 kann man sich nicht beschränken auf die Fälle, dass etwa der Winkel gegenüber MR grösser wäre als der gegenüber MS. Daher genügt auch nicht die Bedingung der Gleichheit eines Seitenverhältnisses und des der grösseren Seite gegenüberliegenden Winkels. Vielmehr muss der enger begrenzte Fall herangezogen werden, dass die Aehnlichkeit zweier Dreiecke bei Gleichheit eines Seitenverhältnisses und des der kleineren Seite gegenüberliegenden Winkels dann stattfindet, wenn die Gegenwinkel des andern Paares entsprechender Seiten entweder beide spitz oder beide stumpf sind.

Erkl. 148. Dass der Winkel gegenüber M_1S bezw. M_2S in den Dreiecken SMR beidemale ein stumpfer bezw. beidemale ein spitzer ist, wird bestimmt durch die Wahl des Punktes R_2. Würde man nämlich statt R_2 etwa Q_2 wählen, so wird in den Dreiecken SM_1R_1 und SM_2Q_2 zwar auch:

$$SM_1 : SM_2 = M_1R_1 : M_2Q_2 = r_1 : r_2$$

und $\sphericalangle S = \sphericalangle S$ sein, aber die Dreiecke sind nicht ähnlich, weil $\sphericalangle SR_1M_1$ stumpf wäre, $\sphericalangle SQ_2M_2$ aber spitz. Denn die Radien nach den Schnittpunkten einer Geraden, wie R_2 und Q_2 bilden das gleichschenklige Dreieck $M_2R_2Q_2$, dessen gleichgrosse Basiswinkel jedenfalls spitz sein müssen. Folglich ist in der That der Winkel M_2Q_2S immer spitz, der Nebenwinkel M_2R_2S aber stumpf.

Erkl. 149. Nach Satz 33 des II. Teiles, dieses Lehrbuches sind zwei Winkel gleichgrosss wenn ihre Sehnen parallel und beide in gleicher

Radien $M_1R_1 \parallel M_2R_2$, so liefert die Verbindungsgerade ihrer Endpunkte R_1R_2 wieder einen Schnittpunkt mit der Centralen, der zunächst mit S' bezeichnet sein möge. Aus denselben Gründen wie oben, entsteht auch hier wieder:

$$\triangle S'M_1R_1 \sim S'M_2R_2,$$

also:

$$S'M_1 : S'M_2 = S'R_1 : S'R_2 = M_1R_1 : M_2R_2 = r_1 : r_2$$

Daher muss Punkt S' mit Punkt S zusammenfallen.

III. Zieht man umgekehrt die Strecke SR_1R_2 als eine beliebige Gerade durch den aus I gewonnenen Punkt S, so ist in den Dreiecken SM_1R_1 und SM_2R_2 der Winkel S gemeinsam, der Winkel gegenüber M_1S bezw. M_2S beidemale stumpf, und es verhält sich:

$$SM_1 : SM_2 = M_1R_1 : M_2R_2 = r_1 : r_2,$$

folglich sind wieder die Dreiecke ähnlich, nämlich:

$$SM_1R_1 \sim SM_2R_2,$$

und es verhält sich auch:

$$SR_1 : SR_2 = r_1 : r_2$$

und

$$\sphericalangle SM_1R_1 = SM_2R_2 \text{ d. h. } M_1R_1 \parallel M_2R_2.$$

IV. Verbindet man endlich noch P_1 mit R_1, P_2 mit R_2, so entstehen die gleichschenkligen Dreiecke $M_1P_1R_1$ und $M_2P_2R_2$. Darin sind die Winkel bei M wegen der parallelen und gleichgerichteten Schenkel gleichgross, folglich:

$$\triangle M_1P_1R_1 \sim M_2P_2R_2,$$

also auch:

$$M_1P_1 : M_2P_2 = P_1R_1 : P_2R_2 = r_1 : r_2$$

oder beide in ungleicher Richtung laufen. Und nach Antwort 36 am gleichen Orte, ist bei zwei gleichgrossen Winkeln, wenn das eine Schenkelpaar parallel ist, auch das zweite Schenkelpaar parallel. Nun ist in Figur 33 $\sphericalangle M_1 P_1 R_1 = M_2 P_2 R_2$ wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke. Da also $M_1 P_1 \parallel M_2 P_2$, so muss auch $P_1 R_1 \parallel P_2 R_2$ sein.

und

$$\sphericalangle M_1 P_1 R_1 = \sphericalangle M_2 P_2 R_2.$$

Demnach sind auch die Verbindungsstrecken der Punkte PR parallel und stehen ebenfalls in dem Verhältnis $r_1 : r_2$.

Frage 49. Welche Folgerungen ergeben sich aus den vorigen Ueberlegungen?

Erkl. 150. Der erste Satz nebenstehender Antwort ist die Ausdrucksweise in Worten für die Ergebnisse I und II der vorigen Antwort. Denn da die Punkte P, R ganz beliebig gewählt waren, so gilt die Aussage allgemein für die Endpunkte zweier parallelen Radien. — Der zweite Satz ist bewiesen im III., der dritte Satz im IV. Teile der vorigen Antwort. Beide haben allgemeine Giltigkeit, weil die Elemente der Figur 33, an welchen der Beweis geführt wurde, vollkommen beliebig gewählt waren.

Erkl. 151. Man hat besonders darauf zu achten, dass man die richtigen Punkte beider Kreise einander zuordnet, also P_1 und P_2, R_1 und R_2, nicht etwa R_1 und Q_2 Man wird daher umgekehrt sagen müssen, entsprechende Punkte beider Kreise seien solche auf einem Aehnlichkeitsstrahl liegende Punkte, deren Abstandsverhältnis vom Aehnlichkeitspunkte das der Radien ist — oder deren zugehörige Radien parallel sind — oder die beide auf der dem Aehnlichkeitspunkte zugewandten oder beide auf der dem Aehnlichkeitspunkte abgewandten Seite der Kreise liegen.

Erkl. 152. Aus dem vorhergehenden ergibt sich unter anderem der folgende bemerkenswerte Satz: „Verbindet man einen beliebigen Punkt S mit allen Punkten eines Kreises und teilt die sämtlichen Verbindungsstrecken im gleichen Teilungsverhältnis $m:n$, so liegen sämtliche Teilpunkte wieder auf einem Kreise; der Mittelpunkt desselben ist der Teilpunkt der Centralen SM im genannten Verhältnis; und der Radius derselben steht zum gegebenen ebenfalls in bestimmtem Verhältnis, nämlich $m:(m \pm n)$.“ — Vergl. hierzu auch Erkl. 155.

Antwort. Aus den vorigen Ueberlegungen lassen sich die nachstehenden Folgerungen ziehen:

1) Die Endpunkte je zweier parallelen und gleichgerichteten Radien zweier Kreise liegen auf einer Geraden durch denselben festen Punkt S_a auf der Verlängerung der Centralen, welcher dieselbe äusserlich teilt im Verhältnis der beiden Radien.

2) Jede Gerade durch diesen festen Punkt S_a trifft beide Kreise in den Endpunkten zweier parallelen und gleichgerichteten Radien als entsprechenden Schnittpunkten.

3) Die Abstände je zweier solchen entsprechenden Punkte vom festen Punkte S_a stehen stets im gleichen Verhältnis, nämlich dem Verhältnis der beiden Radien.

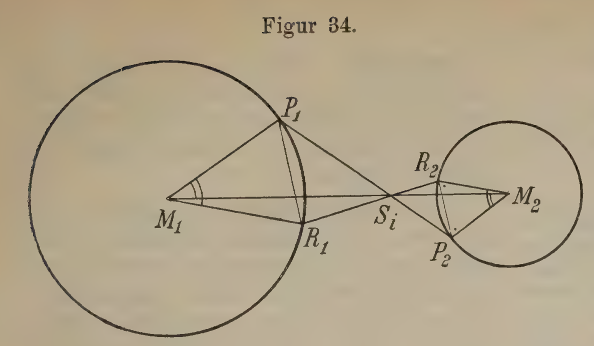
4) Die Verbindungsstrecke zweier beliebigen Punkte des einen Kreises und die Verbindungsstrecke ihrer entsprechenden Punkte auf dem andern Kreis sind parallel und stehen stets in gleichem Verhältnis, nämlich dem Verhältnis der beiden Radien.

Dies sind aber genau die Eigenschaften, durch welche früher die „perspektivisch ähnliche Lage“ festgestellt war, und daher nennt man den festen Punkt S_a den äusseren Aehnlichkeitspunkt, und jede Gerade durch ihn einen äusseren Aehnlichkeitsstrahl der beiden Kreise M_1 und M_2.

Frage 50. Welche Abänderung erfahren die bisherigen Betrachtungen, wenn man den parallelen Radien die entgegengesetzte Richtung gibt?

Antwort. I. Zieht man in den Kreisen um M_1 und M_2 zwei beliebige parallele und entgegengesetzt ge-

Figur 34.



richtete Radien $M_1P_1 \parallel M_2P_2$ (Fig. 34), so liefert die Verbindungsgerade ihrer Endpunkte einen Schnittpunkt S_i auf der Centralen als gemeinsamen Scheitel der Dreiecke M_1P_1S und M_2P_2S. Da hierin die Winkel bei M als Wechselwinkel und jene bei S je als Scheitelwinkel gleich sind, so ist:

$$\triangle SM_1P_1 \sim SM_2P_2,$$

also:

$$SM_1 : SM_2 = SP_1 : SP_2 = M_1P_1 : M_2P_2 = r_1 : r_2$$

II. Ein beliebiges zweites Paar paralleler und entgegengesetzt gerichteter Radien $M_1R_1 \parallel M_2R_2$ liefert wieder einen Schnittpunkt S' auf der Centralen, für welchen wegen der ähnlichen Dreiecke:

$$S'M_1R_1 \sim S'M_2R_2$$

auch wieder:

$$S'M_1 : S'M_2 = S'R_1 : S'R_2 = MR_1 : MR_2 = r_1 : r_2.$$

Folglich fällt S' mit S zusammen.

III. Wird umgekehrt die Gerade SR_1R_2 als beliebige Gerade durch den aus I gewonnenen Punkt S angenommen, so sind in den Dreiecken SM_1R_1 und SM_2R_2 die Winkel S als Scheitelwinkel gleich, die Winkel gegenüber SM_1 bezw. SM_2 beidemale stumpf, und es verhält sich:

$$SM_1 : SM_2 = M_1R_1 : M_2R_2 = r_1 : r_2;$$

folglich sind auch hier die Dreiecke:

$$SM_1R_1 \sim SM_2R_2,$$

und es verhält sich auch:

$$SR_1 : SR_2 = r_1 : r_2,$$

und

$$\sphericalangle SM_1R_1 = SM_2R_2, \text{ d. h. } M_1R_1 \parallel M_2R_2.$$

IV. Die Verbindungsgeraden der Punkte P_1R_1 bezw. P_2R_2 bilden endlich die ähnlichen gleichschenkligen Dreiecke:

$$M_1P_1R_1 \sim M_2P_2R_2,$$

weil die Winkel bei M als Winkel paralleler Geraden gleich sind. Daher muss:

$$M_1P_1 : M_2P_2 = P_1R_1 : P_2R_2 = r_1 : r_2$$

und

$$\sphericalangle M_1P_1R_1 = M_2P_2R_2 \text{ d. h. } P_1R_1 \parallel P_2R_2.$$

Erkl. 153. Schon in Erkl. 145 war darauf hingewiesen worden, dass die beiden Richtungen paralleler Radien gleichwertige Ergebnisse liefern. Man sieht, dass in der That die Entwicklungen nebenstehender Antworten 50 und 51 völlig analog sind zu denen der Antworten 48 und 49: wie jene für den Punkt S_a, so diese für den Punkt S_i. Dasselbe gilt auch für den vorliegenden Fall vom Inhalte der Erkl. 146 bis 152.

Erkl. 154. Auch hier ist besonders darauf zu achten, dass die richtigen Punkte beider Kreise zugeordnet werden. Die Gerade R_1R_2 trifft wohl den Kreis M_2 noch in einem zweiten Punkte Q_2, aber der Radius M_2Q_2 ist nicht parallel dem Radius M_1R_1. Es gilt daher wieder dieselbe Bedingung für zugeordnete Punkte wie in Erkl. 151, dass solche nämlich auf einem Aehnlichkeitsstrahle liegen und als Abstandsverhältnis vom Aehnlichkeitspunkt das der Radien haben — oder parallel gerichtete Radien haben — oder beide auf der dem Aehnlichkeitspunkt zugewandten oder beide auf der dem Aehnlichkeitspunkt abgewandten Seite der Kreise liegen.

Erkl. 155. Der Satz in Erkl. 152 fasst in sich die beiden Erscheinungen der Figuren 33 und 34. Hat nämlich das Teilungsverhältnis einen Wert zwischen $+0$ und $+\infty$, so entsteht in Figur 33 zum Punkte S und dem Kreise M_1 ein Kreis wie M_2. Hat das Teilungsverhältnis einen Wert zwischen $-\infty$ und -1, so entsteht in derselben Figur 33 zum Punkte S und dem Kreise M_2 ein Kreis wie M_1; liegt dagegen der Wert des Teilungsverhältnisses zwischen -1 und -0, so entsteht in Figur 34 zum Punkte S und dem Kreise M_1 ein Kreis M_2 (oder zum Punkte S und dem Kreis M_2 ein Kreis M_1).

Frage 51. Welches sind die Ergebnisse der vorigen Ueberlegungen?

Erkl. 156. In wörtlicher Wiederholung gilt zu nebenstehenden Ausführungen der Inhalt der Erkl. 150.

Erkl. 157. Da der Kreis eine zentrisch symmetrische Figur ist, so geht aus Antwort 43 des VII. Teiles dieses Lehrbuches hervor, dass sobald ein Aehnlichkeitspunkt der einen Art (äusserer oder innerer) besteht, dann immer auch ein Aehnlichkeitspunkt der andern Art (innerer oder äusserer) bestehen muss. Teilt man nämlich die beiden Kreise durch zwei beliebige parallele Durchmesser (z. B. auch durch die gemeinsame Zentrale $M_1 M_2$ in Figur 33 und 34), so entspricht der Halbkreis über dem einen Durchmesser dem über dem andern bei äusserem Aehnlichkeitspunkt, dagegen entspricht derselbe Halbkreis über dem einen Durchmesser dem Halbkreis unter dem andern Durchmesser bei innerem Aehnlichkeitspunkt.

Erkl. 158. Zu beachten ist bei den beiderlei verschiedenen Aehnlichkeitszuordnungen die jedesmalige Umlaufsrichtung der Kreise. Für beiderlei Aehnlichkeitspunkte findet nämlich der entsprechende Umlauf um beide Kreise in derselben Umlaufsrichtung statt. So geht $P_1 R_1$ in Figur 33 u. 34 beidemale mit dem Uhrzeiger, die Kreisfläche zur rechten Hand. Und ebenfalls mit dem Uhrzeiger und die Kreisfläche zur Rechten geht $P_2 R_2$ sowohl in Figur 33 als 34.

Erkl. 159. Eine Zuordnung solcher Punkte auf zwei Kreisen, welche dem ungleichwendigen Umlaufe entsprechen, ist zwar ebenfalls möglich, aber nicht unter Aufrechterhaltung der in den Antworten 49 und 51 aufgestellten Beziehungen der „perspektivisch ähnlichen Lage“. Ueber die interessanten Ergebnisse dieser veränderten Art von Zuordnung sehe man in Antwort der Frage 57 u. ff., sowie im Abschnitte 6 b dieses Teiles.

Antwort. Aus den vorstehenden Ueberlegungen ergeben sich für den Punkt S_i ganz analoge Folgerungen, wie in Antwort 49 für den Punkt S_a, nämlich folgende:

1) Die Endpunkte je zweier parallelen und entgegengesetzt gerichteten Radien zweier Kreise liegen auf einer Geraden durch denselben festen Punkt S_i der Centralen, welcher dieselbe innerlich teilt im Verhältnis der beiden Radien.

2) Jede Gerade durch den festen Punkt S_i trifft beide Kreise in den Endpunkten zweier parallelen und entgegengesetzt gerichteten Radien als entsprechenden Schnittpunkten.

3) Die Abstände je zweier solchen entsprechenden Punkte vom festen Punkte S stehen stets im gleichen Verhältnis, nämlich dem Verhältnis der beiden Radien.

4) Die Verbindungsstrecke zweier beliebigen Punkte des einen Kreises und die Verbindungsstrecke ihrer entsprechenden Punkte auf dem andern Kreise sind parallel und stehen stets in gleichem Verhältnis, nämlich dem Verhältnis der beiden Radien.

Daher nennt man den festen Punkt S_i den inneren Aehnlichkeitspunkt und jede Gerade durch ihn einen inneren Aehnlichkeitsstrahl der beiden Kreise M_1 und M_2.

Frage 52. Welche weiteren Folgerungen knüpfen sich an die bisherigen Betrachtungen über die Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise?

Erkl. 160. Da sowohl für den äusseren Aehnlichkeitspunkt S_a als für den inneren Aehnlichkeitspunkt S_i derselben Kreise die Beziehung gilt:

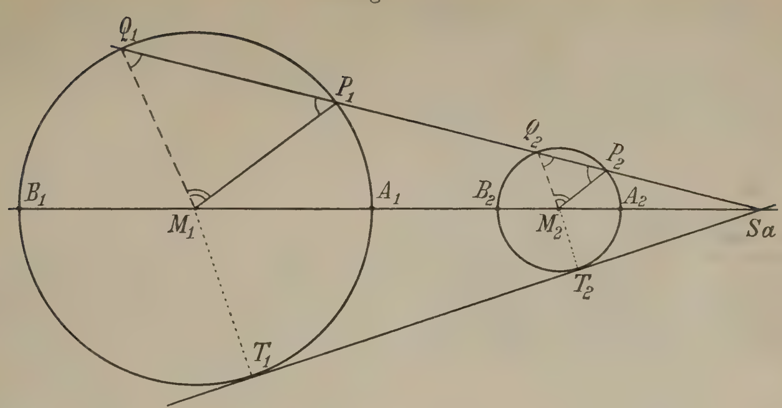
$$S_a M_1 : S_a M_2 = r_1 : r_2 = S_i M_1 : S_i M_2,$$

so erkennt man sofort, dass die Aehnlichkeitspunkte mit den beiden Kreismittelpunkten vier harmonische Punkte bilden, und dass die Teilstrecken $S_a M_1$ und $S_a M_2$ bezw. $S_i M_1$ und $S_i M_2$ selbst entsprechende Strecken beider Figuren sind.

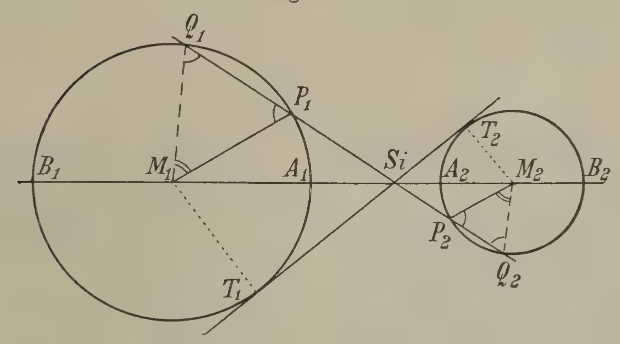
Antwort. Ein Aehnlichkeitsstrahl durch den äusseren und inneren Aehnlichkeitspunkt trifft jeden Kreis in entsprechenden Punkten. Wird also der eine Kreis in zwei Punkten geschnitten, so geschieht dasselbe mit dem andern Kreis; wird der eine nur in einem Punkte geschnitten, so muss dies auch beim zweiten Kreise zutreffen.

1) Sind Q_1 Q_2 in Figur 35 bezw. 36 die Punkte, in welchen der äussere bezw.

Figur 35.



Figur 36.



Erkl. 161. Es bedarf keiner weiteren Festsetzung, dass auch Strecken wie $P_1 Q_1$ und $P_2 Q_2$ entsprechende Strecken sind, und dass auch:

$$P_1 Q_1 : P_2 Q_2 = r_1 : r_2,$$

ebenso wie in Figur 33 und 34:

$$P_1 R_1 : P_2 R_2 = r_1 : r_2.$$

Entsprechende Punkte beider Kreisflächen sind auch die Mittelpunkte solcher entsprechenden Sehnen u. s. w. Ebenso müssen auch die Centriwinkel entsprechender Radienpaare gleich sein, wie z. B.:

$$\sphericalangle P_1 M_1 Q_1 = P_2 M_2 Q_2.$$

Folglich sind auch die zwischen den entsprechenden Punkten $P_1 Q_1$ und $P_2 Q_2$ liegenden Kreisbogen als ähnliche Bogenstücke zu bezeichnen. Auch ihre Längen müssen sich verhalten wie $r_1 = r_2$. Und ihre Mittelpunkte u. s. w. müssen ebenfalls entsprechende Punkte der beiden Kreisperipherien sein.

Erkl. 162. Auf jedem Aehnlichkeitsstrahl können vier Punkte liegen: davon zwei entsprechende und zwei nichtentsprechende. Für die Beziehung zum äusseren Aehnlichkeitspunkt werden je zwei entsprechende Punkte von einem nichtentsprechenden Punkte getrennt, bei der Beziehung zum inneren Aehnlichkeitspunkt liegen je zwei ent-

innere Aehnlichkeitsstrahl $S_a P_1 P_2$ in Fig. 33 bezw. $S_i P_1 P_2$ in Fig. 34 die Kreise zum zweitenmale trifft, so sind in beiden Figuren 35 und 36 die Dreiecke $M_1 P_1 Q_1$ und $M_2 P_2 Q_2$ jedenfalls gleichschenklig, also die Winkel $P_1 = Q_1$, $P_2 = Q_2$. Nun sind aber wegen der ursprünglichen Konstruktion der entsprechenden Punkte $P_1 P_2$ die Radien $M_1 P_1 \parallel M_2 P_2$, also $\sphericalangle P_1 = P_2$; folglich ist auch $\sphericalangle Q_1 = Q_2$, d. h. auch $M_1 Q_1 \parallel M_2 Q_2$, weil ja die Winkel $Q_1 Q_2$ der Lage nach korrespondierende sind. Folglich sind $Q_1 Q_2$ gerade ebensogut entsprechende Punkte beider Kreise, wie $P_1 P_2$.

2) Wird der eine Kreis nur in einem Punkte, d. h. in zwei zusammenfallenden Punkten vom Aehnlichkeitsstrahle getroffen, so müssen auch die zwei entsprechenden Punkte des andern Kreises zusammenfallen. In solchem Falle ist aber der Aehnlichkeitsstrahl Tangente an den einen und folglich auch an den

sprechende ungetrennt. Daher müssen umgekehrt bei Aufsuchung zweier nichtentsprechenden Kreispunkte auf einem äusseren Aehnlichkeitsstrahl je zwei äussere und zwei innere Punkte zusammengenommen werden, auf dem inneren Aehnlichkeitsstrahl dagegen je ein äusserer und ein innerer Punkt — von den vier Schnittpunkten des Aehnlichkeitsstrahles.

Erkl. 163. Um den letzten Satz nebenstehender Antwort unmittelbar zu beweisen, ziehe man vom Aehnlichkeitspunkt S_a oder S_i eine Tangente an einen der beiden Kreise M_1 und fälle von M_2 die Senkrechte auf dieselbe. Der Fusspunkt möge zunächst als T_2' bezeichnet sein, solange nicht bewiesen ist, dass T_2' mit dem Endpunkt T_2 eines Radius zusammenfällt. Dann ist:

$$\triangle M_1 T_1 S \sim M_2 T_2' S$$

wegen gleicher Winkel, also:

$$M_1 T_1 : M_2 T_2' = M_1 S : M_2 S.$$

Letzteres Verhältnis ist aber $r_1 : r_2$, folglich auch:

$$M_1 T_1 : M_2 T_2' = r_1 : r_2,$$

d. h.:

$$M_2 T_2' = r_2 = M_2 T_2.$$

andern Kreis, d. h. die gemeinsamen Tangenten zweier Kreise schneiden einander im Aehnlichkeitspunkt: die äusseren im äusseren, die inneren im inneren.

Frage 53. Wie lassen sich die Hauptergebnisse der letzten Antworten in Worte fassen?

Erkl. 164. Der nebenstehende Satz bildet in der That die Zusammenfassung aller bisher gefundenen. Denn was in den bisherigen Antworten einzeln ausgeführt wurde, besonders über die Eigenschaften der Aehnlichkeitsstrahlen u. s. w., ist inbegriffen in dem Ausdrucke der „perspektivischen Lage“. Die bisherigen Ueberlegungen mussten diesem Satze vorausgeschickt werden — einmal, um erkennen zu lassen, in welch weittragender Bedeutung die einzelnen Ausdrücke des nebenstehenden Satzes aufzufassen sind, — und sodann um zu beweisen, dass eben alle Folgerungen aus solch umfassender Anschauung bei der Auffassung zweier Kreise als ähnlicher Figuren wirklich gezogen werden können und müssen.

Anwendung von diesen Beziehungen wird u. a. auch gemacht in Vonderlinn's Lehrbüchern des Projektionszeichnens.

Erkl. 165. Aus nebenstehendem Satze folgt insbesondere auch die Anwendbarkeit der Konstruktionsweise nach der „Aehnlichkeitsmethode“ auf Figuren mit Kreisen (siehe Abschnitt 8 des VII. Teiles dieses Lehrbuches).

Antwort. Als Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse dieses Abschnitts kann man die Aussage aufstellen:

Satz 6. *Zwei beliebige Kreise in beliebiger Lage sind stets in zweifacher Weise gleichwendig ähnliche Figuren in perspektivischer Lage mit Zuordnung der Endpunkte paralleler Radien, nämlich mit äusserem Aehnlichkeitspunkt, wenn diese parallelen Radien gleich gerichtet, mit innerem Aehnlichkeitspunkt, wenn dieselben entgegengesetzt gerichtet sind. — Die beiden Aehnlichkeitspunkte teilen die Centrale der beiden Kreise aussen bezw. innen (harmonisch) im Verhältnis der beiden Radien und sind zugleich die Schnittpunkte der gemeinsamen Tangenten an beide Kreise.*

Frage 54. Wie verhalten sich zwei Kreise hinsichtlich ihrer Umfänge und Inhalte?

Erkl. 166. Das nebenstehende Ergebnis folgt auch aus den früher durchgeführten Aus-

Antwort. Da Kreise ähnliche Figuren sind, so müssen sich deren Umfänge verhalten wie entsprechende Strecken, ihre Flächen wie die Quadrate entsprechender Strecken. Nun sind aber

wertungen von Kreisumfang und Kreisfläche. Ist r_1 und r_2 Radius, U_1, u_2 Umfang und F_1, F_2 Flächeninhalt zweier Kreise, so ist:

$u_1 = 2r_1\pi$, $u_2 = 2r_2\pi$, $F_1 = r_1^2\pi$, $F_2 = r_2^2\pi$, also:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{2r_1\pi}{2r_2\pi} = \frac{r_1}{r_2}$$

und

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{r_1^2\pi}{r_2^2\pi} = \frac{r_1^2}{r_2^2}.$$

Erkl. 167. Die Anschauung je zweier Kreise als ähnlicher Figuren liefert eine Erweiterung der Auffassung der Zahl π. Man hat nämlich nunmehr auch geometrisch bewiesen, dass wenn für einen einzigen Kreis Umfang und Fläche gefunden ist, dann diese Aufgabe für alle möglichen Kreise gelöst ist, und dass π für jeden beliebigen Kreis das Verhältnis des Umfangs zum Durchmesser und zugleich des Flächeninhalts zum Quadrate des Radius ist.

die einzigen entsprechenden Strecken die Radien, also erhält man den Satz:

Satz 7. Die Umfänge zweier Kreise verhalten sich wie ihre Radien, die Inhalte zweier Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Radien.

Frage 55. Welche merkwürdige Anwendung lässt der vorige Satz zu auf den pythagoreischen Lehrsatz?

Erkl. 168. Die in nebenstehender Antwort durchgeführte Ueberlegung wurde schon angestellt von dem im fünften Jahrhundert vor Christus lebenden Mathematiker Hippokrates von Chios. Man nennt nach ihm die beiden Möndchen mit dem lateinischen Namen lunulae Hippocratis (luna = Mond, lunula = Möndchen). Hippokrates selbst hatte sie natürlich mit griechischem Namen belegt, nämlich „meniscus“, ein Wort, das auch in der Physik verwandt wird für die Kuppe des Quecksilbers im Barometer (μήν = Monat, Mond, μηνίσκος = Möndchen).

Erkl. 169. Hippokrates kannte den pythagoreischen Lehrsatz und die Proportionalität der Kreisfläche mit dem Quadrat des Durchmessers, — nicht aber die Grösse der Kreisfläche. Letztere gedachte er dadurch zu finden, dass er den Kreis in Beziehung setzte zu diesen Möndchen. Er benutzte dazu das gleichschenklige rechtwinklige Dreieck, wobei diese Möndchen gleichgross sind, und hoffte (allerdings vergebens), dass wenn die Fläche eines solchen Möndchens dem halben Dreieck gleich werde, auf solchem Wege auch für die Fläche des Kreises eine gleichgrosse geradlinige Figur gefunden werden könne. Aber erst 200 Jahre später wurde von Archimedes ein richtiger Weg und damit auch das Ergebnis gefunden.

Erkl. 170. In Zahlenwerten ist zwar die wirkliche Berechnung mit allgemeinen Zeichen nicht elementar möglich, wohl aber wenigstens eine Art von Bestätigung. Man hat nämlich wegen der Parallelen:

Antwort. Beschreibt man über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks nicht (wie im eigentlichen pythagoreischen Lehrsatze) Quadrate oder ähnliche Vielecke (wie in Antwort der Frage 45 des VII. Teiles dieses Lehrbuches), sondern drei Halbkreise, so sind dies ebenfalls ähnliche Figuren, also muss der Halbkreis über der Hypotenuse gleich sein der Summe der Halbkreise über den Katheten. Klappt man nun den Hypotenusenhalbkreis um seinen Durchmesser um, so muss er durch die Spitze des Dreiecks gehen und aus den andern Halbkreisen Stücke ausschneiden, so dass von diesen noch je ein mondförmiges Stück frei bleibt, während die übrige Fläche dem Hypotenusenhalbkreis und dem betreffenden Kathetenhalbkreis gemeinsam ist. Man hat also die Reihe von Gleichungen (Fig. 37 auf folg. Seite):

Halbkreis $ABDA$
$=$ Halbkreis BE_1CG_1B + Halbkreis AE_2CG_2A;

und nach der Umklappung:

Halbkreis ABF_1CF_2A
$=$ Halbkreis BE_1CG_1B + Halbkreis AE_2CG_2A;

und mit Zerlegung aller Teile in ihre einzelnen Flächenstücke:

Dreieck ABC + Segment BE_1CF_1B
+ Segment AE_2CF_2A
$=$ Segment BE_1CF_1B + Möndchen BF_1CG_1B
+ Segm. AE_2CF_2A + Möndchen AF_2CG_2A.

$$ME_1 \# \frac{b}{2},\ ME_2 \# \frac{a}{2}$$

sowie 2α und 2β als Centriwinkel der Segmente. Folglich ist:

$$\text{Sektor } MBF_1C = \frac{\pi r^2}{360}\cdot 2\alpha,$$

$$\text{Sektor } MAF_2C = \frac{\pi r^2}{360}\cdot 2\beta,$$

$$\text{Dreieck } MBC = \frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{b}{2} = \frac{ab}{4},$$

$$\text{Dreieck } MAC = \frac{1}{2}\cdot b\cdot\frac{a}{2} = \frac{ab}{4}$$

(gleich vorigem wegen gleicher Grundseite und Höhe). Folglich:

$$\text{Segment } BE_1CF_1 = \frac{\pi r^2}{360}\cdot 2\alpha - \frac{ab}{4},$$

$$\text{Segment } AE_2CF_2 = \frac{\pi r^2}{360}\cdot 2\beta - \frac{ab}{4}.$$

Und da hierin jeweils $r = \frac{c}{2}$, so folgt für das erste Segment:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\pi\alpha}{180}\cdot c^2 - ab\right),$$

für das zweite:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\pi\beta}{180}\cdot c^2 - ab\right).$$

Nun ist der Halbkreis über a gleich:

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2\pi = \frac{a^2}{8}\pi,$$

jener über b gleich:

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{b}{2}\right)^2\pi = \frac{b^2}{8}\cdot\pi,$$

also ist das Möndchen über a gleich:

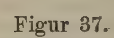
$$\frac{a^2}{8}\pi - \frac{1}{4}\left(\frac{\pi\alpha}{180}c^2 - ab\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{2}\pi - \frac{\pi\alpha}{180}\cdot c^2 + ab\right),$$

das Möndchen über b gleich:

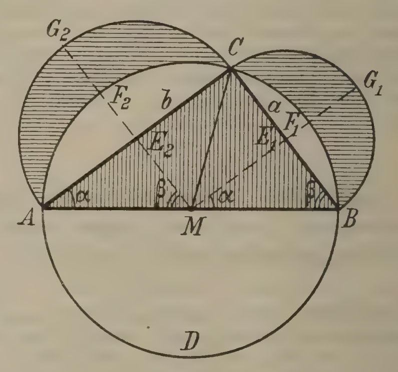
$$\frac{1}{4}\left(\frac{b^2}{2}\pi - \frac{\pi\beta}{180}\cdot c^2 + ab\right).$$

Lässt man nun die auf beiden Seiten der Gleichung identisch auftretenden Segmente beiderseits weg, so bleibt die merkwürdige Beziehung:

Dreieck ABC
$= \text{Möndchen } BF_1CG_1B + \text{Möndchen } AF_2CG_2A.$



Figur 37.



Bei der Summierung fällt nun wieder alles weg bis auf die Dreiecksfläche, nämlich:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{2}\pi + \frac{b^2}{2}\pi - \frac{\pi\alpha}{180}c^2 - \frac{\pi\beta}{180}c^2 + ab + ab\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}(a^2+b^2) - \frac{\pi c^2}{180}(\alpha+\beta) + 2ab\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}\cdot c^2 - \frac{\pi c^2}{180}\cdot 90 + 2ab\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}c^2 - \frac{\pi}{2}c^2 + 2ab\right) = \frac{2ab}{4} = \frac{ab}{2} = \triangle ABC.$$

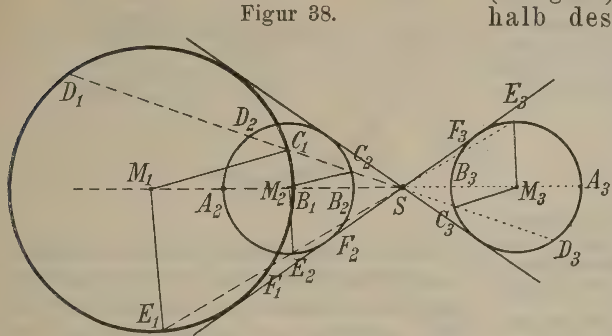
Frage 56. Welche verschiedenen Lagebeziehungen können die Aehnlichkeitspunkte zu den beiden perspektivisch liegenden Kreisen annehmen?

Erkl. 171. Dass ein Aehnlichkeitspunkt, der ausserhalb oder auf oder innerhalb einer ersten Figur liegt, auch dieselbe Art von Lage zur zweiten Figur haben muss, geht aus der ver-

Antwort. Da die Lage eines Punktes zu einem Kreise von dreifacher Art sein kann, nämlich ausserhalb des Kreises, auf dem Kreise, oder innerhalb des Kreises, so muss auch für die Lage des Aehnlichkeitspunktes, und zwar sowohl des äusseren als des inneren Aehn-

allgemeinerten Anschauung der Aehnlichkeit hervor, wobei jede der gerade betrachteten Figuren als Teil einer ganzen Ebene gilt, und der Aehnlichkeitspunkt derjenige Punkt beider Ebenen ist, welcher sich selbst zugeordnet ist.

Figur 38.



Erkl. 172. In den Figuren 38 bis 40 ist jeweils zum Kreise 1 derselbe Punkt S sowohl als äusserer wie als innerer Aehnlichkeitspunkt gewählt und so der Kreis 2 mit äusserem, der Kreis 3 mit innerem Aehnlichkeitspunkt zu 1 zugeordnet. Dabei sind entsprechende Endpunkte auf der Centralen $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$, deren gegenseitige Lage je nach Art des Aehnlichkeitspunktes verschieden ist. Ebenso sind in jedem Kreise zwei Paare paralleler Radien gezogen, um auch diese Entstehungsweise durchzuführen, also in Figur 38 bis 40:

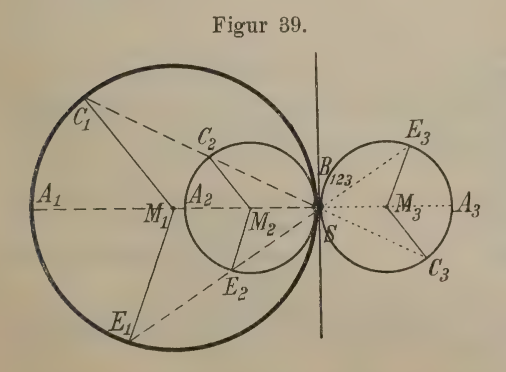
$$M_1 C_1 \parallel M_2 C_2 \parallel M_3 C_3$$

und

$$M_1 E_1 \parallel M_2 E_2 \parallel M_3 E_3.$$

Die zweiten Schnittpunkte der Sekante C_{123} sind $D_1 D_2 D_3$, jene der Sekante E_{123} sind $F_1 F_2 F_3$: jeweils als entsprechende Punkte auf den drei Kreisen 1, 2, 3. Auch hier ist die Verschiedenheit der gegenseitigen Lage zu beachten.

Figur 39.



Erkl. 173. Das Teilungsverhältnis, in welchem die durch S gehenden Aehnlichkeitsstrahlen geteilt werden, ist für alle drei Figuren 38 bis 40 auch ungefähr gleich gewählt, nämlich

lichkeitspunktes diese dreifache Unterscheidung eintreten.

1) Der Aehnlichkeitspunkt liegt ausserhalb des ersten Kreises (s. Fig. 38). Dann muss er auch ausserhalb des zweiten Kreises liegen. (In den Figuren 38 bis 40 ist derselbe Punkt S jedesmal äusserer Aehnlichkeitspunkt für die Kreise 1 und 2, innerer Aehnlichkeitspunkt für die Kreise 1 und 3.) Wenn daher S innerer Aehnlichkeitspunkt ist, so können die Kreise einander unmöglich schneiden, sondern liegen ganz auseinander; denn jede Strecke von S nach einem Punkte des ersten Kreises wird nach der andern Seite verlängert nach dem geltenden Teilungsverhältnis. Ist aber S äusserer Aehnlichkeitspunkt, so können die Kreise ganz auseinanderliegen (wie in Fig. 35) oder sie können einander schneiden (wie 1 und 2 in Fig. 38) oder auch äusserlich berühren.

2) Der Aehnlichkeitspunkt liegt auf der Peripherie des ersten Kreises. Dann muss er auch auf der Peripherie des zweiten Kreises liegen; und da der Aehnlichkeitspunkt stets auf der Centralen liegt, so muss er der Berührungspunkt beider Kreise sein. Hat man daher zwei einander ausschliessend berührende Kreise, so liegt der innere Aehnlichkeitspunkt im Berührungspunkte; hat man zwei einander einschliessend berührende Kreise, so liegt der äussere Aehnlichkeitspunkt im Berührungspunkte. Im Berührungspunkte treffen sich auch, wie schon in den Antworten der Fragen 120 und 128 des IV. Teiles dieses Lehrbuches nachgewiesen wurde, die Verbindungsgeraden der Endpunkte paralleler Radien (und zwar von gleicher Richtung bei einschliessender Berührung, von entgegengesetzter Richtung bei ausschliessender Berührung).

3) Der Aehnlichkeitspunkt liegt innerhalb des ersten Kreises. Dann liegt er auch innerhalb des zweiten

für die Kreise 1 und 2 oder 1 und 3 je ungefähr 2 : 1, d. h. die Strecken SA_2 und $SA_3 \cdots$ sind je etwa die Hälfte der Strecke SA_1 (die Abweichung von 2 : 1 soll das völlige Zusammenfallen der Punkte $M_2 B_1$ in Figur 38 und $M_1 A_2$ in Figur 39 vermeiden). Dadurch sind dann auch die Kreise 2 und 3 untereinander in perspektivischer Lage und zwar mit demselben Punkte S als innerem Aehnlichkeitspunkte und mit dem Teilungsverhältnis 1 : 1. (Man vergleiche die Erklärungen 105 bis 108 im VII. Teile dieses Lehrbuches.)

Figur 40.

Erkl. 174. Im rechnungsmässigen Ausdruck sei die Centrale c, die Radien r_1 und r_2, dann ist die Entfernung des Aehnlichkeitspunktes, der im Verhältnis $r_1 : r_2$ teilt, vom Mittelpunkt des Kreises 1 gleich $\frac{c \cdot r_1}{r_1 \pm r_2}$, vom Mittelpunkt des Kreises 2 gleich $\frac{c \cdot r_2}{r_1 \pm r_2}$, wobei $\pm$ Zeichen für äusseren bezw. inneren Aehnlichkeitspunkt zu setzen ist. Je nachdem dann:

$$r_1 \gtreqless r_2 \text{ und } r_1 + r_2 \gtreqless c \gtreqless r_1 - r_2,$$

nimmt der Bruch $\frac{c}{r_1 \pm r_2}$ die verschiedenen Werte an $\gtreqless 1$.

Erkl. 175. Die im vorstehenden durchgeführte gemeinsame Behandlungsweise der Lagebeziehungen ermöglicht gegenüber der einzelnen Behandlung für jeden Aehnlichkeitspunkt eine bedeutende Vereinfachung. Von den nebenstehenden drei Fällen umfasst nämlich der erste und letzte je vier, der zweite zwei Arten der folgenden zehn Einzelfälle:

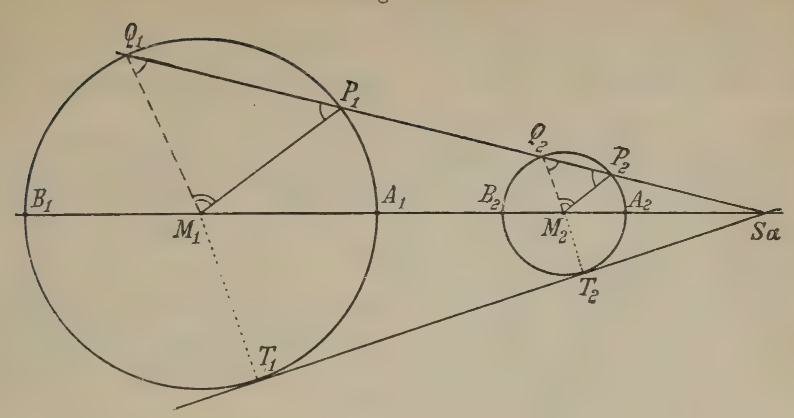
Kreises. Wenn dabei Punkt S äusserer Aehnlichkeitspunkt ist, so können die beiden Kreise einander unmöglich schneiden, sondern sie liegen ganz ineinander; denn jede Strecke von S nach einem Punkte des ersten Kreises wird nach dem geltenden Teilungsverhältnis verkürzt, so dass der neue Punkt stets näher bei S liegt, als der vorherige. Ist aber S innerer Aehnlichkeitspunkt, so können die Kreise einander schneiden (wie in Figur 40), oder ganz ineinanderliegen, oder einschliessend berühren.

Da bei ineinanderliegenden Kreisen keine gemeinsamen Tangenten vorhanden sind, so kommt bei diesem dritten Falle die Bestimmung der Aehnlichkeitspunkte durch gemeinsame Tangenten in Wegfall.

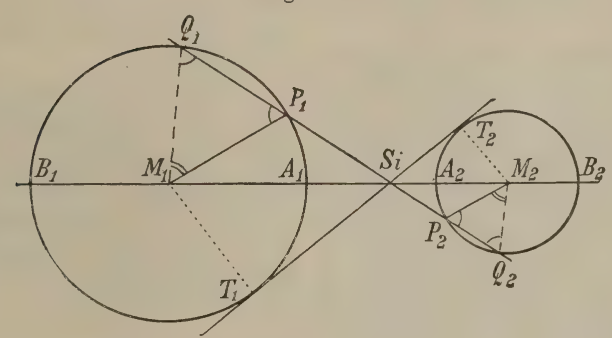
	Aeusserer Aehnlichkeitspunkt	Innerer Aehnlichkeitspunkt
1) Auseinanderliegende Kreise	Ausserhalb beider Kreise, näher dem kleineren	Zwischen beiden Kreisen, näher dem kleineren
2) Ausschliessend berührende Kreise	Ausserhalb beider Kreise, näher dem kleineren	Berührungspunkt
3) Schneidende Kreise	Ausserhalb beider Kreise, näher dem kleineren	Innerhalb beider Kreise, näher dem kleineren
4) Einschliessend berührende Kreise	Berührungspunkt	Innerhalb beider Kreise, näher dem kleineren
5) Ineinander liegende Kreise	Innerhalb beider Kreise, näher dem kleineren, ausserhalb der Centralstrecke	Innerhalb beider Kreise, näher dem kleineren, innerhalb der Centralstrecke.

Dabei bedeutet der Ausdruck „näher dem kleineren Kreise“, dass der besprochene Punkt sowohl der Peripherie als dem Mittelpunkte des erwähnten Kreises näher liegt, als der Peripherie bezw. dem Mittelpunkte des andern Kreises.

Figur 41.



Figur 42.



Frage 57. Zu welchen Ergebnissen gelangt man bei Betrachtung der nicht zugeordneten Schnittpunkte zweier Kreise mit zwei Aehnlichkeitsstrahlen?

Erkl. 176. Da:

$$SA_1 : SA_2 = r_1 : r_2 = SB_1 : SB_2,$$

so folgt:

$$SA_1 \cdot SB_2 = SA_2 \cdot SB_1. \text{ —}$$

Wegen der in T_1 bezw. T_2 zusammenfallenden Schnittpunkte der Kreise mit den Tangenten hat der Satz für diese kein besonderes Ergebnis, denn man erhält nur die Identität:

$$ST_1 \cdot ST_2 = ST_2 \cdot ST_1.$$

Statt:

$$SP_1 : SP_2 = SA_1 : SA_2$$

könnte man auch setzen:

$$SQ_1 : SQ_2 = SA_1 : SA_2,$$

also:

$$SQ_1 \cdot SA_2 = SQ_2 \cdot SA_1.$$

Nimmt man hierzu den Sekantensatz in der Form:

$$SA_2 \cdot SB_2 = SP_2 \cdot SQ_2,$$

so folgt durch Division:

$$SQ_1 : SB_2 = SA_1 : SP_2$$

oder:

$$SQ_1 \cdot SP_2 = SA_1 \cdot SB_2,$$

Antwort. Betrachtet man in Fig. 41 oder 42 die vier Punkte $P_1 Q_1 P_2 Q_2$ eines Aehnlichkeitsstrahles in Verbindung mit denen eines beliebigen andern Aehnlichkeitsstrahles, z. B. auch mit denen der Centrale $A_1 B_1 A_2 B_2$, so erhält man mehrfach bemerkenswerte Beziehungen:

1) Es ist jedenfalls:

$$SP_1 : SP_2 = r_1 : r_2 = SQ_1 : SQ_2,$$

also entsteht durch Gleichsetzung der Produkte der äusseren und inneren Glieder der Proportion:

$$SP_1 \cdot SQ_2 = SP_2 \cdot SQ_1.$$

Und dies gilt auf jedem Strahl durch S, so dass z. B. auch:

$$SA_1 \cdot SB_2 = SA_2 \cdot SB_1.$$

2) Ebenso ist aber auch für zwei beliebige Aehnlichkeitsstrahlen, z. B. SPQ und SAB:

$$SP_1 : SP_2 = r_1 : r_2 = SA_1 : SA_2,$$

also ein anderes Paar der Gleichheiten in nebenstehender Antwort. Und ebenso könnte durch andere Zusammenfassung der Aehnlichkeitsproportion mit dem Sekantensatz jede andere Beziehung vollständig abgeleitet werden.

Erkl. 177. Es ist äusserst bemerkenswert, dass die nebenstehenden, sowie die vorstehenden Ueberlegungen ganz buchstäblich gleichlautende Anwendung finden auf die beiden Figuren 41 u. 42, so dass also auch keine Unterscheidung der Buchstaben S_a und S_i nötig wird.

Während aber die Abschnitte vom äusseren Aehnlichkeitspunkte S_a stets nach derselben Seite gerichtet sind, und zwei nicht entsprechende Punkte entweder beide innen oder beide aussen liegen, so sind beim inneren Aehnlichkeitspunkte S_i die Abschnitte stets nach entgegengesetzten Seiten gerichtet, und zwei nicht entsprechende Punkte liegen stets getrennt durch zwei andere nicht entsprechende Punkte.

Erkl. 178. An der Figur 41 mit dem äusseren Aehnlichkeitspunkte ist die Erkennung der nicht entsprechenden oder inversen Punkte etwas leichter zu übersehen, als an der Figur 42 beim inneren Aehnlichkeitspunkte. Denn $SP_2 \cdot SQ_1$ in Figur 41 ist das Produkt des grössten und des kleinsten Abschnittes, so dass dessen Gleichheit mit dem Produkt der beiden mittelgrossen Abschnitte $SP_1 \cdot SQ_2$ leicht übersichtlich ist. — In Figur 42 dagegen ist $SP_2 \cdot SQ_1$ zwar auch Produkt des grössten und kleinsten Abschnittes, aber die Faktoren des gleichen Produkts $SP_1 \cdot SQ_2$ sind doch viel weniger an Grösse unterschieden. Man merkt sich also am besten die Art der Zusammenfassung, dass immer auf der einen Seite von S_i der grössere und auf der andern Seite von S_i der kleinere Abschnitt zusammengehören.

Erkl. 179. Die Abschnitte t_1 und t_2 sind in der Figur 41 von S_a aus gleich gerichtet, in Figur 42 dagegen von S_i aus entgegengesetzt gerichtet. In beiden Figuren aber gilt die Beziehung:

$$t_1 : t_2 = r_1 : r_2.$$

Daraus kann man entnehmen:

$$t_1 = \frac{r_1}{r_2} \cdot t_2$$

also:

$$t_1^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \cdot t_1^2;$$

und hieraus bildet man sodann:

$$\frac{r_2}{r_1} \cdot t_1^2 = \frac{r_2}{r_1} \cdot \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \cdot t_2^2 = \frac{r_1}{r_2} \cdot t_2^2.$$

Da in diesem Ausdrucke keinerlei Abhängigkeit von der Wahl der Geraden SPQ oder von der Richtung der Radien MP, MQ u. s. w. vorhanden ist, so muss der gleiche Wert auch für jeden andern Aehnlichkeitsstrahl durch S_a oder S_i entstehen.

also wieder:

$$SP_1 \cdot SA_2 = SP_2 \cdot SA_1.$$

Nimmt man dies zusammen mit dem Ausdruck des Sekantensatzes für den Kreis M_2, nämlich:

$$SA_2 \cdot SB_2 = SP_2 \cdot SQ_2,$$

so entsteht durch Division unter Wegfall der Grössen SA_2 und SP_2 die Gleichung:

$$SP_1 : SB_2 = SA_1 : SQ_2$$

oder:

$$SP_1 \cdot SQ_2 = SA_1 \cdot SB_2.$$

Letzteres ist nach vorigem wieder gleich $SB_1 \cdot SA_2$; und statt ersterem hätte auch $SP_2 \cdot SQ_1$ gesetzt werden können, also folgt:

$$SP_1 \cdot SQ_2 = SQ_1 \cdot SP_2 = SA_1 \cdot SB_2 = SB_1 \cdot SA_2.$$

Und dies gilt für die Schnittpunkte zweier ganz beliebigen Aehnlichkeitsstrahlen.

3) Zum gleichen Ergebnis für einen einzelnen Aehnlichkeitsstrahl gelangt man durch Benutzung der Tangentenabschnitte $t_1 = ST_1$ und $t_2 = ST_2$ bezw. der Werte t_1^2 und t_2^2, nämlich der „Potenz“ des Aehnlichkeitspunktes in Bezug auf jeden der Kreise 1 und 2. Man hat nämlich:

$$SP_1 : SP_2 = r_1 : r_2$$

und

$$t_1^2 = SP_1 \cdot SQ_1 \text{ bezw. } t_2^2 = SP_2 \cdot SQ_2.$$

Dividiert man mit der ersten Gleichung in die zweite oder multipliziert die erste mit der dritten, so fällt im ersten Falle SP_1 weg, im zweiten Falle SP_2, und man hat:

$$SP_2 \cdot SQ_1 = \frac{t_1^2 \cdot r_2}{r_1} \text{ bezw. } SP_1 \cdot SQ_2 = \frac{t_2^2 \cdot r_1}{r_2}.$$

Da nun aber:

$$t_1 : t_2 = r_1 : r_2$$

also:

$$t_1^2 : t_2^2 = r_1^2 : r_2^2,$$

so ist auch der Wert der obigen Quotienten derselbe:

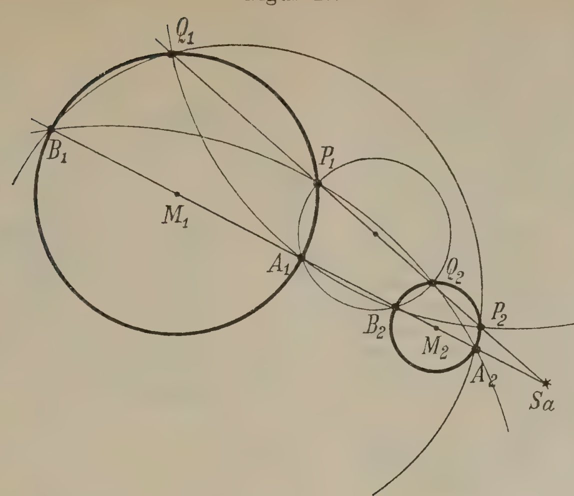
$$\frac{t_1^2 \cdot r_2}{r_1} = \frac{t_2^2 \cdot r_1}{r_2},$$

also wieder:

$$SP_2 \cdot SQ_1 = SP_1 \cdot SQ_2 = \frac{t_1^2 \cdot r_2}{r_1} = \frac{t_2^2 \cdot r_1}{r_2}.$$

Und da dieser Wert ein konstanter ist, so gilt er für jeden beliebigen Aehnlichkeitsstrahl.


Figur 43.



Erkl. 180. Die hier vereinzelt angewendete Benennung des Wertes:

$$\frac{t_1^2 \cdot r_2}{r_1} = \frac{t_2^2 \cdot r_1}{r_2}$$

als „gemeinschaftliche Potenz der zwei Kreise in Bezug auf den Aehnlichkeitspunkt“ ist nicht zu verwechseln mit dem später (siehe Abschnitt 5 dieses Teiles) auftretenden Ausdruck dafür, dass ein Punkt in Bezug auf zwei Kreise dieselbe Potenz habe.

Erkl. 181. Dass vier Punkte auf einem Kreise liegen müssen, wenn die Abstände je zweier vom Schnittpunkte der Verbindungsgeraden gleiches Produkt ergeben, ist eine einfache Umkehrung des Satzes 1 in diesem Teile dieses Lehrbuches. Zum Beweise wähle man z. B. die vier Punkte $P_1 Q_2 A_1 B_2$, lege zunächst durch drei dieser Punkte $P_1 Q_2 A_1$ einen Kreis und nenne den auf SA_1 entstehenden Punkt vorerst B'. Dann gilt nach dem Sekantensatz:

$$SP_1 \cdot SQ_2 = SA_1 \cdot SB',$$

also:

$$SB' = \frac{SA_1 \cdot SQ_2}{SP_1}.$$

Nach Nebenstehendem aber ist auch:

$$SP_1 \cdot SQ_2 = SA_1 \cdot SB_2,$$

also:

$$SB_2 = \frac{SA_1 \cdot SQ_2}{SP_1}.$$

Folglich ist $SB_2 = SB'$, d. h. B' identisch mit B_2.

Erkl. 182. In Figur 43 und 44 sind für die in den Figuren 41 und 42 gezeichnet vorliegenden Doppelpaare von inversen Punkten, nämlich $P_1 Q_2$ mit $A_1 B_2$ und mit $A_2 B_1$, sowie $P_2 Q_1$ mit denselben beiden Paaren die Kreise

4) Liegen aber auf zwei Geraden je zwei Punkte, deren Entfernungen vom Schnittpunkte der Geraden ein konstantes Produkt bilden, so muss durch die vier Punkte eine Kreislinie hindurchgehen. Und jene beiden gleichen Produkte bilden die Potenz jenes Punktes in Bezug auf diese Kreislinie. Daher kann man durch je zwei Paare nicht entsprechender Schnittpunkte zweier beliebigen Aehnlichkeitsstrahlen eine Kreislinie legen. Und in Bezug auf alle diese Kreislinien hat der zugehörige Aehnlichkeitspunkt der zwei ursprünglichen Kreise je dieselbe Potenz, nämlich:

$$\frac{t_1^2 \cdot r_2}{r_1} = \frac{t_2^2 \cdot r_1}{r_2}.$$

Daher nennt man solche Punktepaare wie $P_1 Q_2$, $P_2 Q_1$, $A_1 B_2$, $A_2 B_1$ entweder nur „nicht entsprechende“ Punkte oder aber „inverse“ Punkte, oder auch „potenzhaltende Punkte“, und den Wert:

$$\frac{t_1^2 r_2}{r_1} = \frac{t_2^2 r_1}{r_2}$$

nennt man auch die gemeinschaftliche Potenz der zwei Kreise in Bezug auf den Aehnlichkeitspunkt. Diese gemeinschaftliche Potenz nennt man äussere, wenn sie sich auf den äusseren, innere, wenn sie sich

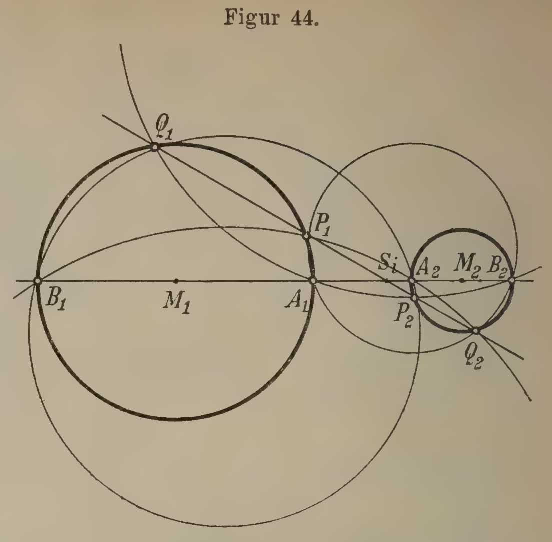
ausgezogen. Man erkennt, dass wirklich für die beiden ersten die Potenz des Aehnlichkeitspunktes gleich $SP_1 \cdot SQ_2$ ist, für die beiden letzten $SP_2 \cdot SQ_1$, also für alle vier Kreise dieselbe Potenz. Solcher Kreise gehen nun aber allein durch das Punktepaar $P_1 Q_2$ unendlich viele, da man zu dem Punktepaar $P_1 Q_2$ jeden Punkt etwa auf der Peripherie des Kreises 1 als dritten und dessen inversen Punkt auf Kreis 2 als vierten Punkt hinzunehmen kann. Die Gesamtheit dieser Kreise bildet ein sog. Kreisbüschel (siehe Figur 133 und Erkl. 314 des IV. Teiles dieses Lehrbuches); und durch jedes Paar zweier inversen Punkte geht ein solches Büschel, so dass im ganzen also doppelt unendlich viele Kreise mit gleicher Potenz in Bezug auf die Aehnlichkeitspunkte entstehen.

Dabei gilt für die Figuren 43 und 44 genau derselbe Wortlaut dieser Beweisführungen. Der Wert des Ausdruckes:

$$\frac{t_1^2 r_2}{r_1} = \frac{t_2^2 r_1}{r_2}$$

ist aber für S_a und S_i verschieden, weil t_1 und t_2 in Figur 43 die von S_a, in Figur 44 die von S_i an die beiden Kreise gehenden Tangentenabschnitte bedeuten.

Figur 44.



auf den inneren Aehnlichkeitspunkt bezieht. Sie ist die Potenz der Aehnlichkeitspunkte für jeden der Kreise, die durch je vier potenzhaltende Punkte bestimmt sind.

Frage 58. Welche besonderen Eigenschaften der Figuren liefern die Radien nach zwei inversen Punkten auf jedem einzelnen Aehnlichkeitsstrahle?

Erkl. 183. Auch die nebenstehende Betrachtung ist in ihrem allgemeinen Teile vollständig gleichwertig anzuwenden auf die Figur zweier Kreise mit äusserem oder mit innerem Aehnlichkeitspunkte, also sowohl für Figur 41 und 42 als auch für Figur 45 und 46. Die Grundseiten der gleichschenkligen Dreiecke sind jedesmal $P_1 Q_2$ bezw. $P_2 Q_1$. Während aber das Dreieck $P_1 X Q_2$ in Figur 45 ganz ausserhalb beider Kreise liegt, so ist $P_1 X Q_2$ in Figur 46 zwar ausserhalb Kreis 1, nicht aber auch ausserhalb Kreis 2. Aehnliches gilt von Dreieck $P_2 X Q_1$ in Figur 46, während in Figur 45 Dreieck $P_2 X Q_1$ mit beiden Kreisen gemeinsame Flächenteile hat.

Erkl. 184. Zwei Kreise berühren einander, wenn ein gemeinsamer Punkt auf der Centralen liegt, und zwar ausschliessend, wenn die Centrale gleich der Summe, einschliessend, wenn die Centrale gleich der Differenz der Radien ist. Nun ist in Figur 45 bezw. 46:

Antwort. Betrachtet man in Figur 41 und 42 die Radien $M_1 P_1 \parallel M_2 P_2$ und $M_1 Q_1 \parallel M_2 Q_2$, so sind in den Punkten $P_1 P_2 Q_1 Q_2$ stets gleichgrosse Winkel vorhanden, wie schon in Antwort der Frage 52 gefunden wurde. Bringt man nun die Radien nach zwei inversen Punkten zum Schnitt, so entstehen über den Strecken $P_1 Q_2$ und $P_2 Q_1$ als Grundseiten gleichschenklige Dreiecke, deren Basiswinkel die eben genannten gleichen Winkel oder deren Scheitelwinkel sind. Für die Spitzen dieser Dreiecke ist dann $XP_1 = XQ_2$, $XQ_1 = XP_2$. Da aber von den Schenkeln dieser Dreiecke stets einer durch den Kreismittelpunkt M_1, der andere durch M_2 geht, so müssen Kreise um X mit den Strecken $XP_1 = XQ_2$ bezw. $XQ_1 = XP_2$ als Radien die beiden gegebenen Kreise 1 und 2 berühren, und zwar je in den inversen Punkten $P_1 Q_2$, $P_2 Q_1$.

Bemerkenswert ist aber die verschiedene Art und Weise der Berührung:

$X_{aa}P_1 + r_1 = X_{aa}M_1$, also berührt Kreis X_{aa} den Kreis M_1 ausschliessend
$X_{aa}Q_2 + r_2 = X_{aa}M_2$, „ „ „ X_{aa} „ „ M_2 „
$X_{ee}Q_1 - r_1 = X_{ee}M_1$, „ „ „ X_{ee} „ „ M_1 einschliessend
$X_{ee}P_2 - r_2 = X_{ee}M_2$, „ „ „ X_{ee} „ „ M_2 „
$X_{ae}P_1 + r_1 = X_{ae}M_1$, „ „ „ X_{ae} „ „ M_1 ausschliessend
$X_{ae}Q_2 - r_2 = X_{ae}M_2$, „ „ „ X_{ae} „ „ M_2 einschliessend
$X_{ea}Q_1 - r_1 = X_{ea}M_1$, „ „ „ X_{ea} „ „ M_1 „
$X_{ea}P_2 + r_2 = X_{ea}M_2$, „ „ „ X_{ea} „ „ M_2 ausschliessend

Erkl. 185. Infolge der Parallelität der Radien MP, MQ sind auch die auf denselben Geraden liegenden Strecken XM entsprechend parallel, und folglich bilden die vier Punkte $M_1 X M_2 X$ stets ein Parallelogramm. Daher bestehen auch einfache Grössenbeziehungen zwischen den Radien der in zwei inversen Punkten berührenden Kreise. Setzt man nämlich in Figur 45:

$$X_{aa}P_1 = \varrho_{aa},$$

so ist:

$$X_{aa}M_1 = \varrho_{aa} + r_1 = X_{ee}M_2,$$

also:

$$X_{ee}P_2 = \varrho_{aa} + r_1 + r_2 = \varrho_{ee};$$

Setzt man ebenso in Figur 46:

$$X_{ae}P_1 = \varrho_{ae},$$

so ist:

$$X_{ae}M_1 = \varrho_{ae} + r_1 = X_{ea}M_2,$$

also:

$$X_{ea}P_2 = \varrho_{ae} + r_1 - r_2 = \varrho_{ea}.$$

Und da diese Gleichungen unabhängig von der Lage des Aehnlichkeitsstrahles sind, so gelten für jedes in zwei inversen Punkten berührende Kreispaar die Gleichungen:

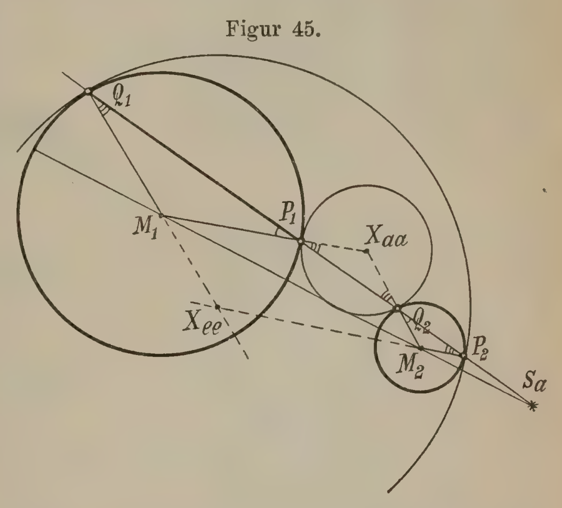
$(r_1 > r_2)$
$$\varrho_{ee} - \varrho_{aa} = r_1 + r_2;$$
$$\varrho_{ea} - \varrho_{ae} = r_1 - r_2.$$

Erkl. 186. Betrachtet man die vorigen Gleichungen für eine grössere Zahl gleichartiger Berührungskreise, so findet man, dass alle möglichen Punkte X_{aa} u. s. w. die stets gleich bleibenden Bedingungen erfüllen:

$$X_{aa}M_1 - X_{aa}M_2 = (\varrho_{aa} + r_1) - (\varrho_{aa} + r_2) = r_1 - r_2;$$
$$X_{ee}M_2 - X_{ee}M_1 = (\varrho_{ee} - r_2) - (\varrho_{ee} - r_1) = r_1 - r_2;$$
$$X_{ae}M_1 - X_{ae}M_2 = (\varrho_{ae} + r_1) - (\varrho_{ae} - r_2) = r_1 + r_2;$$
$$X_{ea}M_2 - X_{ea}M_1 = (\varrho_{ea} + r_2) - (\varrho_{ea} - r_1) = r_1 + r_2.$$

Erkl. 187. Ein Vergleich der Figuren 45 und 46 mit den Figuren 43 und 44 auf Grund der in Erkl. 182 angedeuteten verallgemeinerten Anschauungsweise zeigt, dass die Figuren 45 und 46 eigentlich nur einen speziellen Fall der Figuren 43 und 44 bilden; es stellen nämlich die Berührungskreise der Figuren 45 und 46 nur ein einzelnes Beispiel dar von den vielen Kreisen, durch welche das Kreisbüschel durch

Figur 45.



Zwei innere inverse Punkte eines äusseren Aehnlichkeitsstrahles (P_1 und Q_2 in Fig. 45) liefern einen Kreis, welcher beide gegebenen Kreise ausschliessend berührt (daher ist der Mittelpunkt X_{aa} genannt).

Zwei äussere inverse Punkte eines äusseren Aehnlichkeitsstrahles (P_2 und Q_1 in Fig. 45) liefern einen Kreis, der beide gegebene Kreise einschliessend berührt (Mittelpunkt X_{ee}).

Zwei inverse Punkte eines inneren Aehnlichkeitsstrahles (P_1 und Q_2 oder P_2 und Q_1 in Fig. 46) liefern einen Kreis, der den einen der beiden gegebenen Kreise ausschliessend, den andern einschliesssend berührt (X_{ae} schliesst 1 aus, 2 ein; X_{ea} schliesst 1 ein, 2 aus).

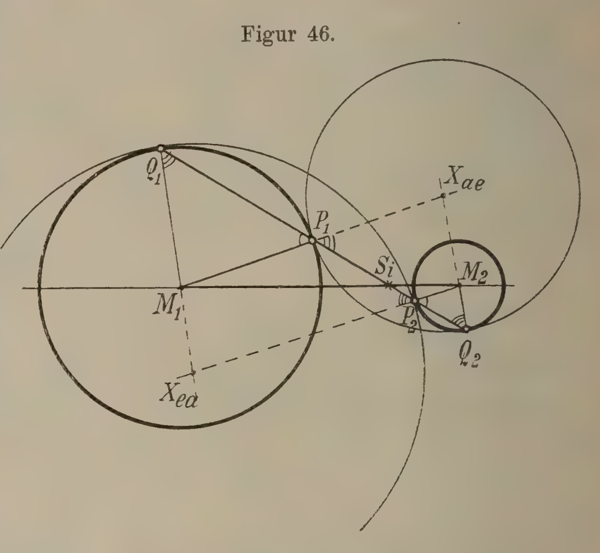
Denkt man sich umgekehrt an die Kreise M_1 und M_2 einen beliebigen Berührungskreis X von beliebiger Berührungsart mit M_1 und M_2 gezogen, so folgt aus der Betrachtung der gleichschenkligen Dreiecke XPQ, dass

die Punkte PQ gebildet wird. Nimmt man z. B. P_1 und Q_2 als feste Punkte an und wählt zu P_1 einen beliebigen Punkt auf Kreis 1 hinzu, z. B. A_1 oder B_1 in Figur 43 oder 44, so entstehen die Kreise $P_1 A_1 B_2 Q_2$ und $P_1 B_1 A_2 Q_2$ in diesen beiden Figuren. Wählt man statt A_1 oder B_1 den Punkt Q_1 selbst, so entsteht die Gerade $SP_1 Q_1$ selbst als Schnittkreis mit unendlich grossem Radius, wie ein solcher zu jedem Kreisbüschel gehört. Lässt man aber den Punkt A_1 oder Q_1 immer näher an P_1 heranrücken, so entstehen immer weitere Schnittkreise, und beim Zusammenfallen dieser Punkte mit P_1 selbst hat man den Berührungskreis in den Punkten $P_1 Q_2$ als einen Grenzfall der vielen durch $P_1 Q_2$ gehenden Schnittkreise.

Erkl. 188. Durch eine ganz ähnliche allgemeine Betrachtung erkennt man die Zusammengehörigkeit der Kreise X_{aa} und X_{ee} einerseits und der Kreise X_{ae} und X_{ea} andererseits. Lässt man nämlich in Fig. 45 und 46 den Punkt P_1 selbst auf dem Kreise wandern, etwa gegen Q_1 hin, so wird der Berührungskreis X_{aa} immer grösser und grösser, und wenn P_1 in den Berührungspunkt der gemeinsamen Tangente hineingerückt ist, so bildet die Tangente selbst einen Berührungskreis mit unendlich grossem Radius, bei welchem die Berührungsart nicht mehr als aus- oder einschliessend zu unterscheiden ist. Wandert dann Punkt P_1 weiter gegen Q_1 hin, so wird aus dem unendlich grossen Kreis wieder ein endlicher, und dieser nimmt zuletzt die Gestalt des Berührungskreises $Q_1 P_2$ an. Die gemeinsame Tangente der Kreise $M_1 M_2$ selbst aber bildet den Uebergang der Berührungsarten von X_{aa} zu X_{ee} bezw. von X_{ae} zu X_{ea}. Dadurch erklärt sich auch die Gemeinsamkeit der Bedingungsgleichungen für X_{aa} und X_{ee} einerseits, X_{ae} und X_{ea} andererseits in Erkl. 186.

die Radien nach den Schnittpunkten der Berührungssehne parallel sind (vgl. auch Antwort der Frage 137 im IV. Teile dieses Lehrbuches), d. h. dass die Berührungspunkte jedes beliebigen Berührungskreises zwei **inverse Punkte** sein müssen.

Figur 46.



Frage 59. Wie lassen sich die vorigen Ergebnisse in Worten aussprechen?

Erkl. 189. Der nebenstehende Satz bildet einen Doppelsatz, nämlich **erstens** für den **äusseren Aehnlichkeitspunkt und äussere Aehnlichkeitsstrahlen mit gleichartiger Berührung** der Berührungskreise sowie mit Tangentenabschnitten $t_1 t_2$ vom **äusseren Aehnlichkeitspunkt** an die Kreise M_1 und M und **äusserer Potenz** dieses Punktes in Bezug auf alle Schnitt- und Berührungskreise (Fig. 43 und 45) — und **zweitens** für den **inneren Aehnlichkeitspunkt** und **innere Aehnlichkeitsstrahlen mit ungleichartiger**

Antwort. Die Ergebnisse der beiden vorigen Antworten liefern folgende Aussage:

Satz 8. Auf den Aehnlichkeitsstrahlen zweier Kreise liefern die Abstände je zweier inversen Punkte vom Aehnlichkeitspunkt stets das konstante Produkt:

$$\frac{t_1^2 \cdot r_2}{r_1} = \frac{t_2^2 \cdot r_1}{r_2}.$$

Zwei auf verschiedenen Aehnlichkeitsstrahlen gelegene Paare inverser

Berührung der Berührungskreise sowie mit Tangentenabschnitten $t_1 t_2$ vom inneren Aehnlichkeitspunkt an die Kreise $M_1 M_2$ und innerer Potenz dieses Punktes in Bezug auf alle Schnitt- und Berührungskreise (Figur 44 und 46).

Erkl. 190. Die „äussere" Potenz des Punktes S_a in Figur 43 und 45 in Bezug auf die Kreise durch $P_1 Q_2$ bezw. $P_2 Q_1$ ist das Produkt der gleichgerichteten Strecken:

$$SP_1 \cdot SQ_2 = SP_2 \cdot SQ_1 = SA_1 \cdot SB_2 = SB_1 \cdot SA_2 = \frac{t_1^2 \cdot r_2}{r_1} = \frac{t_1^2 \cdot r_1}{r_2},$$

und die „innere" Potenz des Punktes S_i in Figur 44 und 46 in Bezug auf die Kreise durch $P_1 Q_2$ bezw. $P_2 Q_1$ ist das Produkt der genau ebenso bezeichneten, aber nunmehr entgegengesetzt gerichteten Strecken.

Erkl. 191. Eine eigentümliche Analogie zu dem Satze in Erkl. 152 ergibt sich aus dem ersten Teile des nebenstehenden Satzes; sie lautet: „Verbindet man einen beliebigen Punkt S mit allen Punkten eines Kreises und konstruiert auf sämtlichen Verbindungsstrecken den Punkt, dessen Abstand mit dem des ursprünglichen Punktes ein konstantes Produkt gibt, so liegen sämtliche neuen Punkte wieder auf einem Kreise."

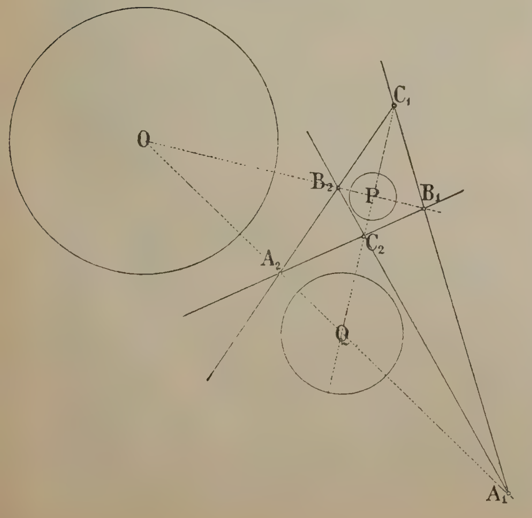
Punkte liegen stets auf je einem Schnittkreise, und jedes einzelne Paar inverser Punkte bildet die Berührungspunkte eines Berührungskreises der beiden ursprünglichen Kreise. Für alle diese Kreise hat die Potenz des Aehnlichkeitspunktes den obigen konstanten Wert, worin t_1 und t_2 die Tangentenabschnitte vom Aehnlichkeitspunkte an die Kreise sind.

Frage 60. Welche Beziehungen bestehen zwischen den Aehnlichkeitspunkten von drei Kreisen?

Antwort. Sind OPQ (s. Fig. 47) die Mittelpunkte dreier Kreise, so liefert das

Kreispaar OQ einen äusseren Aehnlichkeitspunkt A_1 und einen inneren Aehnlichkeitspunkt A_2,
" OP " " " B_1 " " " " B_2,
" PQ " " " C_1 " " " " C_2.

Figur 47.



Nun ist jede Gerade durch A_1 äusserer Aehnlichkeitsstrahl der Kreise OQ, d. h. eine selbstentsprechende Gerade der durch die Kreise O und Q bestimmten ebenen Figurensysteme. Dieselbe Eigenschaft hat jede Gerade durch B_1 für die Kreise O und P bezw. für die dadurch bestimmten ebenen Figurensysteme.

Daher muss die Gerade $A_1 B_1$ allen drei Figurensystemen gemeinsam sein, d. h. die Gerade $A_1 B_1$ ist äusserer Aehnlichkeitsstrahl sowohl für O und P, als auch für O und Q, folglich auch für P und Q; und demnach geht dieselbe Gerade $A_1 B_1$ auch durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt von P und Q, nämlich durch C_1. Daraus folgt umgekehrt, dass die drei äusseren Aehnlichkeitspunkte $A_1 B_1 C_1$ auf dieser Geraden liegen.

Erkl. 192. Nach der schon mehrfach zur Anwendung gebrachten erweiterten Anschauung der Aehnlichkeit rechnet man zu einem Kreise nicht nur die Punkte seiner Peripherie, sondern auch Punkte innerhalb und ausserhalb derselben, allgemein jeden beliebigen Punkt seiner Ebene. In diesem Sinne kann man dann alle Figuren der ganzen Ebene als ein durch die Beziehung zu diesem Kreise fest bestimmtes ebenes Figurensystem auffassen. Durch Zuordnung zweier Kreise findet dann auch eine Zuordnung dieser ebenen Systeme statt, wobei im allgemeinen jedem Punkt der Ebene — betrachtet als zugehörig zum ersten Kreis — ein von ihm verschiedener Punkt derselben Ebene als zugehörig zum zweiten Kreise entspricht. Der einzige Punkt, welcher dabei sich selbst entspricht, also beiden ebenen Systemen gemeinsam ist, ist dann der Aehnlichkeitspunkt, und die gemeinsamen Geraden sind die Aehnlichkeitsstrahlen, welche sich selbst entsprechen, d. h. als Gesamtheit aller ihrer Punkte, nicht etwa einzeln Punkt für Punkt, sondern als gerade Linien im ganzen.

Erkl. 193. Im nebenstehenden Beweise hat man sich nun dasselbe ebene System der Reihe nach als jedem der Kreise zugehörig zu denken, und die Zuordnung kann dann jedesmal noch eine doppelte sein, nämlich 1) O und Q mit äusserem, 2) O und Q mit innerem Aehnlichkeitspunkte, 3) O und P mit äusserem, 4) O und P mit innerem Aehnlichkeitspunkte, 5) P und Q mit äusserem, 6) P und Q mit innerem Aehnlichkeitspunkte. Dabei ist dann jedesmal ein anderer Punkt mit den durch ihn gehenden Geraden den beiden Systemen gemeinsam, nämlich der Reihe nach $A_1 A_2 B_1 B_2 C_1 C_2$.

Man führt durch dieselbe Betrachtung den Beweis dafür, dass die Gerade durch die Punkte $A_1 B_2$ durch C_2 geht, sowie $A_2 B_1$ durch C_2 und $A_2 B_2$ durch C_1. Man erhält also vier gerade Linien, auf welchen je drei Aehnlichkeitspunkte liegen, und kann den Satz aussprechen:

Satz 9. Die sechs Aehnlichkeitspunkte, welche drei beliebigen Kreisen zugehören, liegen viermal zu je drei in einer Geraden (Aehnlichkeitsachse oder Symmetrale), nämlich die drei äusseren Aehnlichkeitspunkte auf der äusseren Aehnlichkeitsachse, und jeder äussere Aehnlichkeitspunkt mit den beiden nicht zugehörigen inneren Aehnlichkeitspunkten auf einer inneren Aehnlichkeitsachse.

Erkl. 194. Der obenstehende Satz bildet eine Erweiterung des Satzes 19 im VII. Teile dieses Lehrbuches und ist benannt nach dem französischen Mathematiker Monge (1746—1818) als „Satz von Monge“. Andere Beweise desselben findet man in der Aufgabensammlung am Schlusse dieses Teiles.

Frage 61. Können zwei Kreise auch als ungleichwendig ähnliche Figuren aufgefasst werden?

Erkl. 195. Bogenstücke zwischen entsprechenden Punkten zweier Kreise sind einander in beiden Kreisen entsprechend. Zu solchen gehören gleichgrosse Centriwinkel und entsprechende Radien und Sehnen. Daher sagt man auch, es seien z. B. ähnliche Bogenstücke die Bogen:

$$\widehat{A_1 P_1} \sim \widehat{A_2 P_2}$$

in Figur 48, weil:

$$\sphericalangle A_1 M_1 P_1 = A_2 M_2 P_2;$$

und

$$\widehat{A_1 P_1} \sim \widehat{A_2 P_2}$$

in Figur 49, weil:

$$\sphericalangle M_1 A_1 P_1 = M_2 A_2 P_2,$$

nämlich je der erste Winkel gegen, der zweite mit der Uhrzeigerdrehung gemessen. Bei solchen Bogenstücken verhalten sich dann die Längen wie die Radien, die Sektoren und Segmente wie deren Quadrate.

Antwort. Bei den bisherigen Betrachtungen waren die zwei Kreise stets als gleichwendig ähnliche Figuren erschienen, ob man nun den äusseren oder inneren Aehnlichkeitspunkt zu Grund legte. Man kann aber mit Beibehaltung dieser zwei Punkte als Aehnlichkeitspunkte auch ungleichwendige Aehnlichkeit der Kreise feststellen. Ordnet man nämlich als entsprechende Punkte wieder die Schnittpunkte der Centralen einander zu, und sodann jedem Punkte des einen Kreises, dessen Radius mit dem des ersten Punktes einen bestimmten Winkel bildet, denjenigen Punkt des andern Kreises, dessen Radius mit dem des entsprechenden Centralen-Schnittpunktes denselben Winkel in umgekehrter Drehungsrichtung bildet,

Erkl. 196. Dreiecke wie SA_1P_1 und SA_2P_2 in Fig. 48 und 49 sind ähnlich wegen Gleichheit aller Winkel; $\sphericalangle S$ ist nämlich gemeinsam und

$$\sphericalangle SA_1P_1 = SA_2P_2$$

als Basiswinkel der gleichschenkligen Dreiecke MAP, welche in beiden Kreisen gleiche Winkel am Mittelpunkte haben. Daher verhält sich auch:

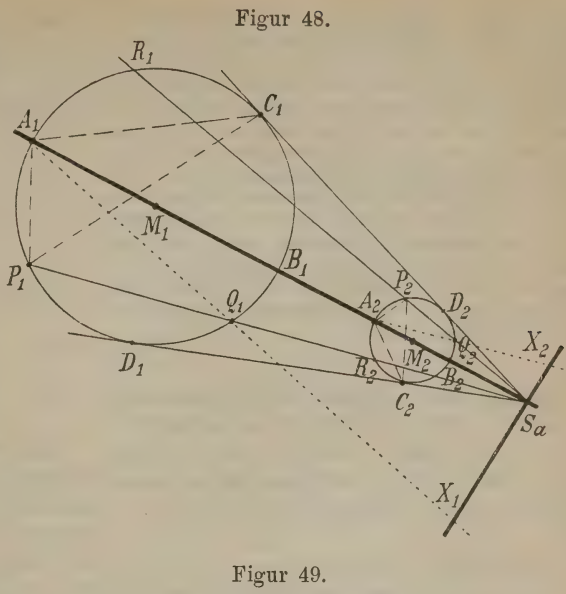
$$SA_1 : SA_2 = SP_1 : SP_2$$
$$= A_1P_1 : A_2P_2 = r_1 : r_2.$$

Wählt man etwa ein Dreieck aus den drei Punkten $A_1C_1P_1$, so ist auch dieses ähnlich dem Dreieck der entsprechenden Punkte $A_2C_2P_2$. Denn seine Winkel sind Peripheriewinkel über ähnlichen Bogenstücken, also hat man lauter gleiche Winkel. Oder man beweist aus vorigem für die Sehnen ähnlicher Bogen, dass:

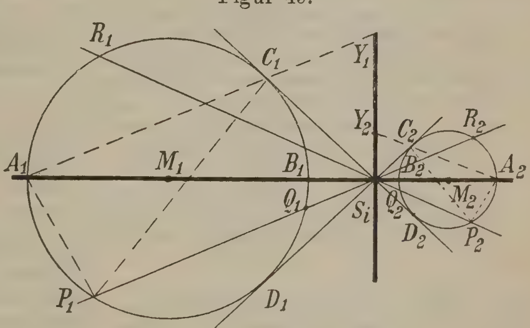
$$A_1P_1 : A_2P_2 = r_1 : r_2$$
$$= A_1C_1 : A_2C_2$$
$$= P_1C_1 : P_2C_2.$$

Und zwar gilt auch dieses sowohl in Figur 48 als Figur 49.

Figur 48.



Figur 49.



Erkl. 197. Da der Aehnlichkeitspunkt S selbstentsprechender Punkt ist, so entspricht jeder Geraden durch S wieder eine Gerade durch S, aber nur SM_1 derselben Geraden SM_2, dagegen SP_1 entspricht SP_2, SC_1 entspricht SC_2, aber auch umgekehrt:

$$SD_1 \backsim SD_2, \quad SR_2 \backsim SR_1.$$

Bringt man aber die Senkrechte auf MS in S zum Schnitt mit zwei beliebigen, entsprechenden Geraden beider Figurensysteme, so findet man sofort, dass die Punkte dieser Senkrechten wieder Punkten derselben Senkrechten entsprechen. So ist in Figur 48 X_1 auf A_1Q_1, in Figur 49 Y_1 auf A_1C_1 gewählt. Und die Punkte X_2Y_2 liegen je auf derselben Geraden SX_1 bezw. SY_1 mit X_1 bezw. Y_1; denn wegen Gleichheit aller Winkel ist:

$$\triangle SA_1X_1 \backsim SA_2X_2$$

bezw.:

$$\triangle SA_1Y_1 \backsim SA_2Y_2,$$

also auch wieder:

$$A_1X_1 : A_2X_2 = SX_1 : SX_2 = Q_1X_1 : Q_2X_2$$
$$= r_1 : r_2$$

und

$$A_1Y_1 : A_2Y_2 = SY_1 : SY_2 = C_1Y_1 : C_2Y_2$$
$$= r_1 : r_2.$$

Erkl. 198. Wie schon in Erkl. 126 des VII. Teiles dieses Lehrbuches ausgeführt wurde, hat bei ungleichwendig ähnlichen Figuren der Begriff der perspektivischen

so erhält man eine Aehnlichkeitszuordnung der beiden Kreise, wobei wieder die beiden Aehnlichkeitspunkte als äusserer oder innerer sich selbstentsprechender Aehnlichkeitspunkt auftreten, und mit je zwei entsprechenden Punkten beider Kreise ähnliche Dreiecke von umgekehrter Umlaufsrichtung bilden. Dabei sind aber dann keineswegs alle Strahlen durch den Aehnlichkeitspunkt selbstentsprechende Geraden beider Figurensysteme, sondern einer beliebigen Geraden durch den Aehnlichkeitspunkt entspricht diejenige Gerade durch den Aehnlichkeitspunkt, welche mit der Centralen denselben Winkel in umgekehrter Drehungsrichtung bildet. Man findet daher nur zwei selbstentsprechende

Lage keine Geltung mehr. Die perspektivische Lage würde herbeigeführt und damit aber auch die gleichwendige Aehnlichkeit, wenn man den einen Kreis samt allen zugehörigen Punkten und Linien um die Centrale als Achse umklappen würde. Man kann also auch umgekehrt sagen, das die Figuren 48 und 49 aus den vorhergehenden Figurenpaaren 41, 42 u. ff. dadurch entstanden gedacht werden können, dass der eine Kreis um die Centrale umgeklappt wird, während die Zuordnung sämtlicher einander entsprechenden Punkte festgehalten bleibt. Dadurch treten dann alle charakteristischen Eigenschaften der ungleichwendigen Aehnlichkeit in Erscheinung.

Geraden beider Figurensysteme, nämlich die Centrale selbst und die im Aehnlichkeitspunkte auf derselben errichtete Senkrechte.

Frage 62. Können zwei Kreise auch als ähnliche Figuren in schiefer Lage aufgefasst werden, und welche Eigenschaft müsste der zugehörige Aehnlichkeitspunkt besitzen?

Erkl. 199. Dass die Kreismittelpunkte ähnlicher Kreise stets entsprechende Punkte in jeder Aehnlichkeitsbeziehung sein müssen, ist die Folge der Verhältnisgleichheit ähnlicher Figuren: Da jedenfalls dem Durchmesser eines Peripheriepunktes wieder der Durchmesser des entsprechenden Punktes entspricht (beide als grösste Sehne aufgefasst), so muss auch dem Mittelpunkte des einen der des andern entsprechen, d. h. die Kreismittelpunkte sind entsprechende Punkte bei jeglicher Art von Aehnlichkeitszuordnung zweier Kreise.

Erkl. 200. Der im nebenstehenden gewonnene geometrische Ortssatz ist gewissermassen ein beiläufiges Ergebnis der hier angestellten Betrachtungen. Aber eben seine folgenreichen Beziehungen zu den Aehnlichkeitsbetrachtungen lassen seine Wichtigkeit an dieser Stelle am bedeutendsten erscheinen. — Für jeden der beiden Kreise M_1 und M_2 ist der Ort für einen Punkt mit vorgeschriebenem Tangentenwinkel nach Satz 48a in Antwort 150 des IV. Teiles dieses Lehrbuches jeweils ein konzentrischer Kreis, dessen Radius gleich ist der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit dem Radius als Kathete und der Hälfte jenes Winkels als Gegenwinkel. Man erhält also nebenstehend auch die Thatsache, dass alle solchen konzentrischen Kreise für gleiche Tangentenwinkel an beide Kreise ihre Schnittpunkte auf dem Kreise mit N als Mittelpunkt und $S_a S_i$ als Durchmesser haben.

Erkl. 201. Ob auf einer gegebenen Tangente eines Kreises ein Punkt vorhanden sei, von dem aus gleiche Tangentenwinkel an beide Kreise möglich sind, hängt von der Lage dieser Tangente zu dem Ortskreise ab. Schneidet die gegebene Tangente

Antwort. Wenn zwei Kreise als ähnliche Figuren in schiefer Lage aufgefasst werden sollen, so müssen erstens die beiden Mittelpunkte je mit dem Aehnlichkeitspunkte S entsprechende Punkte und entsprechende Verbindungsstrecken bilden. Es müsste also jedenfalls:

$$M_1 S : M_2 S = r_1 : r_2.$$

Dem Tangentenpaar von S an den einen Kreis müsste zweitens auch das Tangentenpaar von S an den andern Kreis entsprechen, und der Winkel des ersten Tangentenpaares gleich dem Winkel des zweiten Tangentenpaares sein — ob man nun gleichwendige oder ungleichwendige Aehnlichkeit zu Grunde legen will. Diese beiden Bedingungen werden aber gleichzeitig erfüllt, indem je die eine mit der andern zusammenfällt.

Nach dem Satze des Apollonius in Antwort der Frage 48 des VI. Teiles dieses Lehrbuches ist nämlich für einen Punkt S, dessen Abstände von M_1 und M_2 sich verhalten wie $r_1 : r_2$, der geometrische Ort ein Kreis über der Verbindungsstrecke derjenigen beiden Punkte als Durchmesser, welche die Strecke $M_1 M_2$ innen und aussen im Verhältnis $r_1 : r_2$ (harmonisch) teilen. Der letztgenannten Bedingung genügen aber die beiden Aehnlichkeitspunkte S_a und S_i der perspektivischen Lage, wie solche bisher benutzt wurden.

Ist nun S ein beliebiger Punkt des Kreises über der Verbindungs-

den Ortskreis in zwei Punkten, so sind von diesen beiden Punkten Tangenten unter gleichen Winkeln an beide Kreise vorhanden. Dies gilt z. B. von den Punkten S_a und K, S_i und L auf den gemeinsamen Tangenten der Kreise $M_1 M_2$. Wenn jedoch die Tangente als gemeinsame Tangente der Kreise M_1 und N gewählt wäre, so wäre ihr Berührungspunkt auf dem Kreise N der einzige Punkt, von welchem aus gleiche Tangentenwinkel möglich wären. Trifft die gegebene Tangente an den Kreis M_1 den Ortskreis gar nicht, so gibt es auch keinen Punkt auf ihr, von welchem Tangenten unter gleichgrossen Winkeln an beide Kreise möglich sind.

Erkl. 202. Nach dem Teilungsverhältnisse der Centralstrecke $M_1 M_2 = c$ durch die Punkte S_a und S_i ist:

$$M_2 S_i = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \cdot c, \quad M_2 S_a = \frac{r_2}{r_1 - r_2} \cdot c;$$

also da:

$$c > r_1 + r_2,$$

jedenfalls:

$$M_2 S_i > r_2 \text{ und } M_2 S_a > r_2.$$

Daher ist der kleinere Kreis M_2 stets völlig umschlossen von dem Kreise N. Darnach kann man aus voriger Erklärung den Schluss ziehen, dass auf jeder Tangente des kleineren Kreises stets zwei Punkte, auf einer Tangente des grösseren Kreises dagegen zwei, ein oder kein Punkt der vorbetrachteten Eigenschaft liegt.

Erkl. 203. Während Punkt S ein ganz beliebiger Punkt des Kreises über Durchmesser $S_a S_i$ ist, enthält dieser Kreis eine Anzahl besonders ausgezeichneter Punkte, nämlich $S_a S_i$ selbst und die Punkte KL. Dass für S_a und S_i die Tangentenwinkel an beide Kreise gleichgross sind, folgt als selbstverständliches Ergebnis ihrer Entstehung: für S_a ist der Winkel identisch, für S_i hat man Scheitelwinkel. Für K und L sind die Geraden KS_a und LS_i die Halbierungslinien der von den Tangenten an beide Kreise gebildeten Winkel, da bei LS_i beiderseits gleiche Winkel an der Geraden anliegen, und bei KS_a auf gleicher Seite der Geraden in entgegengesetzter Richtung gleiche Winkel anliegen.

Erkl. 204. Um über die Grösse des Winkels Aufschluss zu erhalten, welchen die von einem Punkte des Kreises über $S_i S_a$ an die Kreise $M_1 M_2$ gezogenen Tangenten bilden, braucht man nur die an dem einen Kreis M_2 entstehenden Tangentenwinkel zu untersuchen, denn die am Kreis M_1 entstehenden sind ja gleichgross. Da nun an der Peripherie beider Kreise der Punkt S_i am nächsten, S_a am fernsten liegt, so ist offen-

strecke $S_a S_i$ als Durchmesser, so kann dieser für einen Aehnlichkeitspunkt der als ähnlich in schiefer Lage aufzufassenden Kreise gelten, denn nach Apollonius ist:

$$M_1 S : M_2 S = r_1 : r_2,$$

und wenn $T_1 T_2$ die Berührungspunkte der von S an die Kreise gelegten Tangenten sind, so sind die Dreiecke:

$$SM_1 T_1 \sim SM_2 T_2$$

ähnliche Dreiecke: als rechtwinklige Dreiecke mit übereinstimmendem Verhältnis der Katheten. Daher ist auch der doppelte Winkel MST, nämlich der Tangentenwinkel, beidemale gleichgross.

Ist aber umgekehrt S ein beliebiger Punkt der Ebene, von welchem an beide Kreise Tangenten mit gleichem Winkel gezogen werden können, so sind dieselben Dreiecke:

$$SM_1 T_1 \sim SM_2 T_2$$

ähnliche Dreiecke wegen der zwei gleichen Winkel bei S und T. Daher verhält sich auch jetzt:

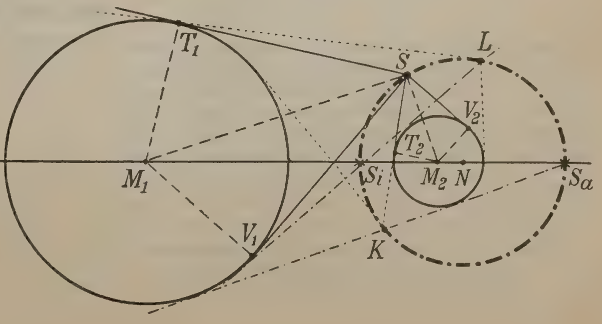
$$SM_1 : SM_2 = r_1 : r_2,$$

und der Punkt S muss auf dem Apollonischen Kreise liegen.

Man erhält somit die Aussage:

Satz 10. Der geometrische Ort für einen Punkt, dessen an zwei Kreise gezogene Tangenten gleichgrosse Tangentenwinkel bilden, ist der Kreis, welcher die Centrale der gegebenen Kreise im Verhältnis ihrer Radien (innen und aussen) harmonisch teilt.

Figur 50.



bar der von S_i aus entstehende Tangentenwinkel der grösste, der von S_a aus entstehende Tangentenwinkel der kleinste, und auf beiden Halbkreisen erfolgt ein stetiges Wachstum dieser Winkel, da die Punkte der Halbkreise von S_i nach S_a immer weiter und weiter sich entfernen von den Mittelpunkten, also auch von der Peripherie der beiden Kreise.

Frage 63. In welcher Weise ist nun jeder Punkt des zuvor gefundenen Kreises als Aehnlichkeitspunkt der zwei Kreise zu verwenden?

Antwort. Wählt man den Punkt S der Figur 50 als Aehnlichkeitspunkt, so handelt es sich noch um die Zuordnung der Punkte beider Kreise, welche einander entsprechen sollen. Das sind aber neben den Kreismittelpunkten in erster Reihe die Berührungspunkte der Tangenten von S an die Kreise. Man erhält daher für jeden Punkt des Kreises N eine doppelte Zuordnung, je nachdem man einer bestimmten Tangente ST_1 an den Kreis M_1 entweder die Tangente ST_2 oder SV_2 an den Kreis M_2 zuordnet; also entspricht dem Punkte T_1 des ersten Kreises entweder der Punkt T_2 oder V_2 des zweiten Kreises. Dem Dreieck ST_1M_1 entspricht dann im ersten Falle das Dreieck ST_2M_2, im andern Falle das Dreieck SV_2M_2, man hat also zuerst gleichwendige, dann gegenwendige Aehnlichkeit. Durch Zuordnung der Punkte T_1 und T_2 oder T_1 und V_2 ist dann auch die Zuordnung aller andern Kreispunkte festgelegt; denn jedem Punkte des ersten Kreises, dessen Radius mit M_1T_1 einen bestimmten Winkel bildet, entspricht derjenige Punkt des zweiten Kreises, dessen Radius denselben Winkel bildet: entweder mit M_2T_2 im gleichen Umdrehungssinne oder mit M_2V_2 im umgekehrten Drehungssinne.

Erkl. 205. Da von S an die beiden Kreise je zwei Tangenten möglich sind, so erhält man auch zwei Berührungspunkte T und V, und alle vier Dreiecke sind ähnlich, nämlich:

$$SM_1T_1 \backsim SM_1V_1 \backsim SM_2T_2 \backsim SM_2V_2.$$

Und zwar sind:

$$SM_1T_1 \backsim SM_2T_2 \text{ bezw. } SV_1M_1 \backsim SV_2M_2$$

gleichwendig ähnlich (Umlauf SMT und SVM hat beidemale die Innenfläche des Dreiecks zur Rechten), dagegen:

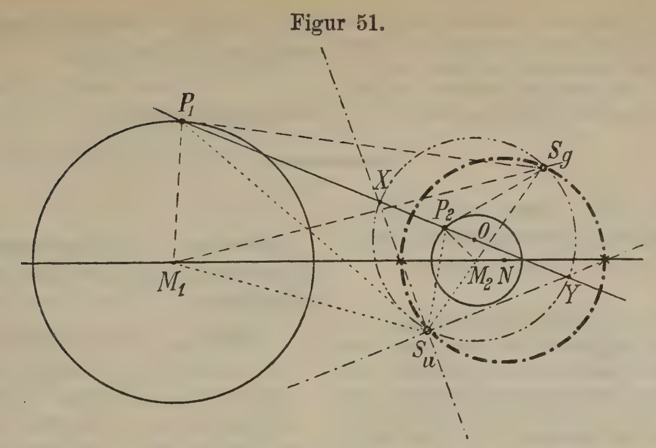
$$SM_1T_1 \backsim SM_2V_2 \text{ bezw. } SM_1V_1 \backsim SM_2T_2$$

sind ungleichwendig ähnlich (Umlauf SM_1T_1 und SM_2T_2 hat die Innenfläche des Dreiecks zur Rechten, dagegen Umlauf SM_1V_1 und SM_2V_2 hat die Innenfläche des Dreiecks zur Linken). Man hat daher auch hier wieder, wie in voriger Antwort 61, zweierlei Möglichkeit der Zuordnung, gleichwendige und gegenwendige.

Erkl. 206. Da die Punkte S_a und S_i ebenfalls Punkte des Ortskreises in Figur 50 sind, so muss auch für jeden derselben eine doppelte Wahl der Zuordnung möglich sein. Und in der That ist die eine Zuordnung die mit der gleichwendigen Aehnlichkeit, also die ursprünglich behandelte, die andere dagegen ist jene mit der ungleichwendigen Aehnlichkeit, die in Antwort der Frage 61 behandelt wurde.

Erkl. 207. Gleichwendig ähnliche Figuren können durch eine Drehung, ungleichwendige durch eine Umklappung aus der schiefen Lage in die perspektivische übergeführt werden. Der Drehungswinkel ist im ersten Falle bei Fig. 50 stets der Winkel M_1SM_2, die Symmetrieachse im zweiten Falle ist die Halbierungslinie desselben Winkels M_1SM_2. Auch in dieser Hinsicht sind neben den Punkten S_iS_a ausgezeichnet die Punkte K und L, indem durch Umklappung um die eine der Tangenten selbst die perspektivische Lage herbeigeführt wird.

Figur 51.



Frage 64. Wie findet man den Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise, wenn zwei beliebig gewählte Punkte derselben zugeordnet sein sollen?

Antwort. Wenn zwei beliebig gewählte Punkte $P_1 P_2$ auf zwei Kreisen zugeordnet sein sollen, so müssen jedenfalls die Abstände dieser Punkte vom gesuchten Aehnlichkeitspunkte S sich verhalten wie die Radien:

$$r_1 : r_2 = SP_1 : SP_2.$$

Daher muss der Aehnlichkeitspunkt auf dem Apollonischen Kreise liegen, dessen Durchmesserendpunkte die Strecke $P_1 P_2$ im Verhältnis der Radien harmonisch teilen. Ferner muss nach vorigen Betrachtungen der Aehnlichkeitspunkt auf dem Apollonischen Kreise liegen, welcher die Centrale $M_1 M_2$ im Verhältnis der Radien harmonisch senkrecht teilt. Also ist der Aehnlichkeitspunkt einer der beiden Schnittpunkte dieser zwei Kreise, und zwar liefert die Wahl des einen die gleichwendige, die des andern die ungleichwendige Aehnlickeit.

In Figur 51 sind zugeordnet $P_1 P_2$, die Strecke $P_1 P_2$ in X und Y geteilt im Verhältnis $r_1 : r_2$, der Halbkreis über XY trifft den Kreis N in den zwei Punkten S_g und S_u; ersterer wird Aehnlichkeitspunkt für die gleichwendige, letzterer Aehnlichkeitspunkt für die ungleichwendige Aehnlichkeit. Durch S_u gehen zwei aufeinander senkrechte Gerade als selbstentsprechende Gerade, nämlich die Geraden $SX \perp SY$, die Halbierungslinien der Winkel $M_1 S M_2$ oder $P_1 S P_2$ und deren Nebenwinkel.

Erkl. 208. Man könnte die Frage aufwerfen, ob sich die Kreise N und O in Fig. 51 immer schneiden müssen, oder ob dieselben auch keine Schnittpunkte haben können. Nun sind aber die Schnittpunkte des Kreises N die Teilpunkte der grössten und der kleinsten Strecken, die zwischen Kreispunkten der beiden Kreise M_1 und M_2 überhaupt möglich sind, also wird jede Strecke $P_1 P_2$ kürzer als die in S_a und länger als die in S_i geteilte Strecke sein. Folglich wird auch auf jeder Strecke $P_1 P_2$ der Punkt X ausserhalb, der Punkt Y innerhalb des Kreises N gelegen sein, und die Kreise O und N liefern stets zwei Schnittpunkte. — Fallen die zugeordneten Punkte $P_1 P_2$ mit den Schnittpunkten der Centralen selbst zusammen, so fällt der Kreis N mit dem Kreis O zusammen, und als Schnittpunkte sind dann wieder zu zählen die Punkte S_a und S_i, wie schon früher betrachtet.

Erkl. 209. In Figur 51 ist:

$$SM_1 P_1 \backsim SM_2 P_2,$$

denn jedes Seitenpaar steht im Verhältnis:

$$r_1 : r_2 = M_1 P_1 : M_2 P_2 = SM_1 : SM_2 = SP_1 : SP_2;$$

für $S_g MP$ hat man die Innenfläche des Dreiecks beidemale zur Rechten, für $S_u M_1 P_1$ ebenfalls zur Rechten, dagegen für $S_u M_2 P_2$ zur Linken.

Erkl. 210. Drehung der Figur $S_g M_2 P_2$ um den Winkel $M_1 S M_2$ bezw. seinen Nebenwinkel bringt die beiden Figuren in perspektivische Lage mit äusserem bezw. innerem Aehnlichkeitspunkte S_g. — Umklappung der Figur $S_u M_2 P_2$ um die Achse $S_u X$ bezw. $S_u Y$ bringt die beiden Figuren wieder in perspektivische Lage mit gleichwendiger Aehnlichkeit und mit äusserem

bezw. innerem Aehnlichkeitspunkte S_u. Bei dieser letztgenannten Umklappung würden $S_u X$ und $S_u Y$ zu Aehnlichkeitsstrahlen; sie sind von der ganzen Figur 51 die einzigen Geraden, welche bei beiderlei Umklappung ihre Lage nicht verändern.

Und ähnliche Dreiecke sind als gleichwendige die Dreiecke:

$$S_g M_1 P_1 \sim S_g M_2 P_2,$$

als ungleichwendige:

$$S_u M_1 P_1 \sim S_u M_2 P_2.$$

Frage 65. Wie lassen sich die bisherigen Ergebnisse über ähnliche Kreise in schiefer Lage in Worte fassen?

Antwort. Als Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse lässt sich der Satz aufstellen:

Satz 11. Zwei beliebige Kreise in beliebiger Lage sind auf unendlich vielfache Weise ähnliche Figuren in schiefer Lage: Geometrischer Ort für den Aehnlichkeitspunkt ist der Kreis, welcher die Centralstrecke im Verhältnis der Radien harmonisch senkrecht teilt.

Satz 11a. Mit Zuordnung zweier beliebigen Peripheriepunkte sind zwei beliebige Kreise in beliebiger Lage stets in zweifacher Weise ähnliche Figuren in schiefer Lage, nämlich mit gleichwendiger und mit ungleichwendiger Aehnlichkeit.

Satz 11b. Bei vorgeschriebener Zuordnung zweier Punkte entstehen die beiden zugehörigen Aehnlichkeitspunkte als Schnittpunkte des Ortskreises mit demjenigen Kreis, welcher die Verbindungsstrecke der entsprechenden Punkte im Verhältnis der Radien harmonisch senkrecht teilt. Der eine ist Aehnlichkeitspunkt für gleichwendige, der andere für ungleichwendige Aehnlichkeit; durch letzteren gehen zwei senkrechte selbstentsprechende Gerade.

Erkl. 211. Um die Bedeutung des nebenstehenden Satzes eingehend zu würdigen, vergleiche man denselben mit den früheren Sätzen analogen Inhaltes, zunächst dem Satze 20b in Antwort 49 des VII. Teiles dieses Lehrbuches. Macht man dort die Strecken $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ zu Radien oder zu Durchmessern von Kreisen, so erhält man die obige Figur 51, indem etwa $A_1 A_2$ die Mittelpunkte, $B_1 B_2$ die entsprechend zugeordneten Peripheriepunkte sind. Der Kreis HJ wird zum ersten, der Kreis KL zum zweiten Apollonischen Kreise, S_u und S_g werden wieder die beiden Aehnlichkeitspunkte.

Für beide Punkte ist:

$$S M_1 P_1 \sim S M_2 P_2,$$

für S_g ausserdem:

$$S M_1 M_2 \sim S P_1 P_2.$$

Für S_u gehen die Schenkel des rechten Winkels XSY durch die Durchmesserendpunkte der beiden Apollonischen Kreise, weil dieselben sowohl im Dreieck $P_1 S P_2$ als $M_1 S M_2$ die Winkel und Nebenwinkel gegenüber der Grundseite $P_1 P_2$ bezw. $M_1 M_2$ halbieren (nach dem Satze des Apollonius: Satz 11 im VI. Teile dieses Lehrbuches).

Erkl. 212. Vergleicht man den Satz ferner mit dem Satze 6 in Antwort 53, so fällt die ausserordentliche Verallgemeinerung auf: Einmal gibt es nicht nur zwei Aehnlichkeitspunkte, sondern eine ganze geometrische Ortslinie für Aehnlichkeitspunkte von je zweierlei Art; sodann nicht nur gleichwendige, sondern auch gegenwendige Aehnlichkeit, und endlich können nicht nur Endpunkte paralleler Radien zugeordnet werden, sondern jeder beliebige Punkt des einen Kreises einem beliebigen Punkte des andern Kreises. — Die Zuordnung der „Endpunkte paralleler Radien“ ist nur ein besonderer Einzelfall und zwar einer eindeutigen Zuordnung, da ja durch einmalige Zuordnung der zwei Endpunkte zweier beliebigen parallelen Radien wegen des Umlaufs durch „ähnliche Bogenstücke“ schon zu sämtlichen Punkten des einen Kreises die entsprechenden Punkte des andern festgelegt sind.

Erkl. 213. Durch die Punkte S_u und S_g gehen nicht nur die Apollonischen Kreise der Verbindungsstrecken $M_1 M_2$ und $P_1 P_2$, sondern

auch alle derartigen Apollonischen Kreise über den Verbindungsstrecken irgend zweier entsprechenden Punkte beider Kreise. Dieselben entstehen zwar jedesmal mit anders gerichteten Durchmessern, aber stets mit gemeinsamer Sehne $S_g S_u$. Und alle Endpunkte jener verschieden gerichteten Durchmesser bilden Grundseiten rechtwinkliger Dreiecke mit Scheitel S_u und Kathetenrichtungen SX und SY.

Frage 66. Welche merkwürdige Anwendung gestattet der vorige Satz auf die Aehnlichkeit regulärer Polygone?

Antwort. Denkt man sich jedem der beiden Kreise in Figur 50 oder 51 ein regelmässiges Vieleck von gleicher Seitenzahl aber beliebiger Lage eingeschrieben (oder umgeschrieben), so können offenbar auf ebenso vielfache Weise beide Vielecke als gleichwendig oder ungleichwendig ähnliche Figuren in schiefer Lage gelten, als die Kreise dies können mit Zuordnung je eines beliebigen Paares solcher Peripheriepunkte, die zugleich Eckpunkte der beiden Polygone sind. Und da zu einem ersten Eckpunkte eines n-Ecks jeder der n Eckpunkte eines andern zugeordnet werden kann, so muss das vorige $n$fach möglich sein; denn durch eine Zuordnung ist wegen der „ähnlichen Bogenstücke" auch jeder folgende Eckpunkt des einen dem folgenden Eckpunkte des andern Vielecks zugeordnet.

Man erhält daher den Satz:

Satz 12. Zwei beliebige regelmässige n-Ecke in beliebiger Lage sind auf je $n$fache Weise gleichwendig oder ungleichwendig ähnliche Figuren, nämlich mit Zuordnung zweier beliebigen Eckpunkte. — Die $2n$ Aehnlichkeitspunkte liegen sämtlich auf dem Apollonischen Kreise, welcher die Centrale im Verhältnis der beiderseitigen Seitenlängen harmonisch senkrecht teilt, und sind jeweils die Schnittpunkte dieses Kreises mit dem gleichartigen Apollonischen Kreise für die Verbindungsstrecke der zugeordneten Eckpunkte.

Erkl. 214. Dass reguläre Polygone überhaupt ähnlich sind, war schon früher gefunden worden; dabei war aber immer die Anschauung zu Grunde gelegt, dass diese Polygone aus beliebiger Lage soweit gedreht würden, dass ihre entsprechenden Seiten in parallele Lage kämen. Nunmehr aber zeigt sich, dass für jede beliebige Lage der Vielecke die Beziehungen zu einem Aehnlichkeitspunkte aufzustellen sind, und zwar nicht nur einmal, sondern $2n$ mal, nämlich n mal mit gleichwendiger und n mal mit ungleichwendiger Aehnlichkeit, je nach Zuordnung eines Seitenpaares.

Erkl. 215. Die Beziehungen zweier ähnlichen Figuren zu einem Aehnlichkeitspunkte sind am deutlichsten verständlich, wenn man die Figur sich erweitert denkt zu einem Figurensystem; dabei erhält man dann als Aehnlichkeitspunkt je einen gemeinsamen oder sich selbst entsprechenden Punkt beider Systeme. Derselbe bildet mit entsprechenden Punktepaaren stets ähnliche Dreiecke vom Seitenverhältnis entsprechender Strecken; Drehung um ihn bezw. Umklappung um zwei senkrechte Achsen durch diesen Punkt bringt beide Figurensysteme in perspektivische Lage.

Erkl. 216. Ist ein Paar Seiten der beiden regulären Vielecke parallel, so werden von selbst wegen der Winkelgleichheiten auch alle folgenden Paare parallel, und eine der obengenannten $2n$ Zuordnungen, nämlich eine der n gleichwendigen, geht in die perspektivische Aehnlichkeitslage mit äusserem, eine andere derselben n gleichwendigen Zuordnungen in jene mit innerem Aehnlichkeitspunkte über. Die beiden zugehörigen ungleichwendigen Zuordnungen haben zwar dieselben beiden Aehnlichkeitspunkte, bleiben aber sonst selbständig bestehen, wie in Antwort 61 beim Kreise gezeigt wurde.

Erkl. 217. Der Satz 12 bildet eine bemerkenswerte Uebergangsstufe zwischen den Sätzen 6 und 11, sowie jenen des VII. Teiles dieses Lehrbuches:

1) Aehnliche unregelmässige und ungeradzahlige reguläre Polygone in perspektivischer Lage, d. h. mit paralleler Zuordnung, haben einen Aehnlichkeitspunkt und zwar mit gleichwendiger Zuordnung, und diesen je nach der Lage entweder als äusseren oder als inneren Aehnlichkeitspunkt.

2) Beliebig liegende ähnliche unregelmässige Polygone haben einen einzigen Aehnlichkeitspunkt und zwar je nach der Umlaufsrichtung entweder mit gleichwendiger oder mit ungleichwendiger Zuordnung.

3) Für parallele Strecken oder perspektivisch (d. h. mit parallelen entsprechenden Strecken) liegende centrische (geradzahlige) gleichwendig ähnliche Vielecke oder für Kreise mit paralleler Zuordnung der Radien gibt es je einen äusseren und einen inneren Aehnlichkeitspunkt mit beidemale gleichwendiger Zuordnung.

4) Für zwei beliebig liegende Strecken gibt es nach Satz 20b des VII. Teiles dieses Lehrbuches zwei Aehnlichkeitspunkte, einen mit gleichwendiger und einen mit ungleichwendiger Zuordnung.

5) Für zwei beliebig liegende reguläre Polygone gibt es $2n$ Aehnlichkeitspunkte: n mit gleichwendiger und n mit ungleichwendiger Zuordnung.

6) Für zwei beliebig zugeordnete Kreise gibt es unendlich viele Aehnlichkeitspunkte mit gleichwendiger und unendlich viele Aehnlichkeitspunkte mit ungleichwendiger Zuordnung.

Frage 67. Welche Folgerung ergibt sich aus Satz 11 für drei beliebig liegende Kreise?

Antwort. Da für zwei Kreise noch eine unendliche Anzahl von Aehnlichkeitspunkten zur Auswahl stand, so kann für drei Kreise jedenfalls noch ein einzelner Aehnlichkeitspunkt zu finden sein, von welchem aus gleiche Tangentenwinkel an alle drei Kreise und ähnliche Dreiecke dieser Tangenten mit den Centralstrecken möglich sind.

Zeichnet man nämlich in Figur 52 zunächst die Apollonischen Kreise für je zwei Centralstrecken M_1M_2 und M_2M_3, durch welche M_1M_2 im Verhältnis $r_1:r_2$ und M_2M_3 im Verhältnis $r_2:r_3$ harmonisch geteilt wird, so gilt für einen jeden der beiden Schnittpunkte dieser Apollonischen Kreise:

$$SM_1:SM_2=r_1:r_2,\quad SM_2:SM_3=r_2:r_3,$$

also auch:

$$SM_1:SM_3=r_1:r_3.$$

Demnach liegt jeder der beiden Punkte S auch auf dem Apollonischen Kreise, durch welchen die dritte Centralstrecke M_1M_3 im Verhältnis $r_1:r_3$ harmonisch geteilt wird. Daher ist jeder der zwei Schnittpunkte dieser drei Apollonischen Kreise zugleich ein Aehnlichkeitspunkt für die drei Kreise $M_1M_2M_3$ von der Eigenschaft, dass Verbindungsstrecken entsprechender Punkte dieser Kreise mit S_1 oder

(Fortsetzung siehe Seite 88)

Erkl. 218. Solange die Zuordnung zweier Punkte bei zwei Kreisen willkürlich gelassen ist, hat man Auswahl unter allen Punkten des Ortskreises für den Aehnlichkeitspunkt. Die nähere Bestimmung bezw. engere Begrenzung kann dann entweder dadurch geschehen, dass man zwei Punkte als entsprechende festlegt, oder dass man eine neue Bedingung hinzufügt. So ist nun unter allen Punkten des Ortskreises derjenige auszusuchen, welcher gleichzeitig Aehnlichkeitspunkt für einen der gegebenen Kreise und einen dritten Kreis ist.

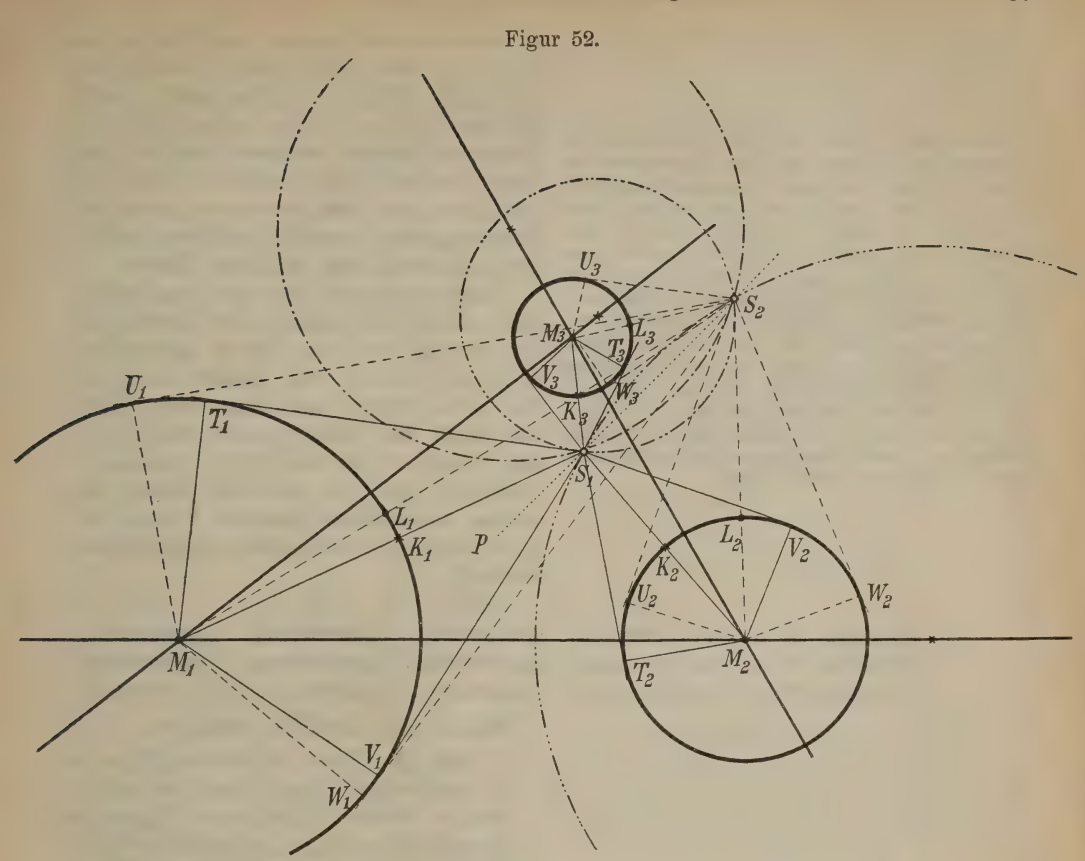
Erkl. 219. Schon in Antwort 49 des VI. Teiles dieses Lehrbuches wurde ein Punkt bezw. zwei Punkte gefunden, deren Abstände von den Eckpunkten eines Dreiecks ABC sich verhalten wie $m:n:p$. Figur 35 des VI. Teiles dieses Lehrbuches zeigt diese Beziehung mit:

$$m:n:p=4:2:1.$$

Die nebenstehende Figur 52 ist jener Figur nachgebildet, indem die Radien der Kreise $M_1M_2M_3$ ebenfalls sich verhalten wie $4:2:1$, und auch das Dreieck $M_1M_2M_3$ mit dem Dreieck ABC jener früheren Figur ähnlich ist. Daher haben auch die Aehnlichkeitspunkte S_1S_2 dieselbe Lage zum Dreieck $M_1M_2M_3$ wie dort zum Dreieck ABC.

Erkl. 220. Bezeichnet man, ebenso wie in Figur 50, mit T, V bezw. U, W die Berührungspunkte der Tangenten von S_1 und S_2 an die Kreise, so hat man die Aehnlichkeiten:

Figur 52.



$$S_1 M_1 T_1 \cong S_1 M_1 V_1 \sim S_1 M_2 T_2 \cong S_1 M_2 V_2 \sim S_1 M_3 T_3 \cong S_1 M_3 V_3$$

und ebenso:

$$S_2 M_1 U_1 \cong S_2 M_1 W_1 \sim S_2 M_2 U_2 \cong S_2 M_2 W_2 \sim S_2 M_3 U_3 \cong S_2 M_3 W_3,$$

und zwar jeweils das erste Dreieck jedes Paares mit Umlaufsrichtung mit dem Uhrzeiger, das zweite gegen den Uhrzeiger. Man erhält also die für beide Punkte S giltigen nachstehenden Gruppen I—IV (siehe Seite 88) in folgender Zuordnung:

I. $S_1 M_1 T_1 \sim S_1 M_2 T_2 \sim S_1 M_3 T_3$ also $S_1 M_1 V_1 \sim S_1 M_2 V_2 \sim S_1 M_3 V_3$
bezw. $S_2 M_1 U_1 \sim S_2 M_2 U_2 \sim S_2 M_3 U_3$ also $S_2 M_1 W_1 \sim S_2 M_2 W_2 \sim S_2 M_3 W_3$,
II. $S_1 M_1 T_1 \sim S_1 M_2 T_2 \sim S_1 M_3 V_3$ also $S_1 M_1 V_1 \sim S_1 M_2 V_2 \sim S_1 M_3 T_3$
bezw. $S_2 M_1 U_1 \sim S_2 M_2 U_2 \sim S_2 M_3 W_3$ also $S_2 M_1 W_1 \sim S_2 M_2 W_2 \sim S_2 M_3 U_3$,
III. $S_1 M_1 T_1 \sim S_1 M_2 V_2 \sim S_1 M_3 V_3$ also $S_1 M_1 V_1 \sim S_1 M_2 T_2 \sim S_1 M_3 T_3$
bezw. $S_2 M_1 U_1 \sim S_2 M_2 W_2 \sim S_2 M_3 W_3$ also $S_2 M_1 W_1 \sim S_2 M_2 U_2 \sim S_2 M_3 U_3$,
IV. $S_1 M_1 T_1 \sim S_1 M_2 V_2 \sim S_1 M_3 T_3$ also $S_1 M_1 V_1 \sim S_1 M_2 T_2 \sim S_1 M_3 V_3$
bezw. $S_2 M_1 U_1 \sim S_2 M_2 W_2 \sim S_2 M_3 U_3$ also $S_2 M_1 W_1 \sim S_2 M_2 U_2 \sim S_2 M_3 W_3$.

Erkl. 221. Zugeordnete Punkte sind auf den drei Kreisen in jedem der obigen Fälle:

I. $T_1 T_2 T_3$, $V_1 V_2 V_3$; $U_1 U_2 U_3$, $W_1 W_2 W_3$ — $K_1 K_2 K_3$; $L_1 L_2 L_3$.
II. $T_1 T_2 V_3$, $V_1 V_2 T_3$; $U_1 U_2 W_3$, $W_1 W_2 U_3$ — $K_1 K_2 K_3$; $L_1 L_2 L_3$.
III. $T_1 V_2 V_3$, $V_1 T_2 T_3$; $U_1 W_2 W_3$, $W_1 U_2 U_3$ — $K_1 K_2 K_3$; $L_1 L_2 L_3$.
IV. $T_1 V_2 T_3$, $V_1 T_2 V_3$; $U_1 W_2 U_3$, $W_1 U_2 W_3$ — $K_1 K_2 K_3$; $L_1 L_2 L_3$.

Man sieht also, dass die Punkte TV, UW verschiedentlich abwechseln, dagegen die Punkte K, L jedesmal entsprechende Punkte sind; und von diesen aus geht die Umlaufsrichtung nach den beiden entgegengesetzten Drehungsrichtungen auseinander. Dasselbe gilt natürlich von den Punkten $M_1 M_2 M_3$, sowie von den andern Durchmesserendpunkten der Radien nach K und L.

S_2 konstantes Verhältnis haben wie $r_1:r_2:r_3$, dass jedes Paar zweier beliebigen Punkte auf einem Kreise mit dem Aehnlichkeitspunkte ein Dreieck bildet, welches ähnlich ist dem Dreieck des Aehnlichkeitspunktes mit dem entsprechenden Punktepaare sowohl auf dem zweiten, als auch dem dritten Kreise.

Zugeordnete Punkte sind dabei stets die Schnittpunkte der Kreise mit der Strecke SM, also für S_1 die Punkte $K_1 K_2 K_3$, für S_2 die Punkte $L_1 L_2 L_3$. Die Zuordnung kann dann aber jedesmal noch die mit gleichwendiger oder ungleichwendiger Umlaufsrichtung sein, so dass für jeden der beiden Aehnlichkeitspunkte viererlei Zuordnungen im ganzen möglich sind, nämlich:

Erkl. 222. Ueber die Vergleichung des nebenstehenden Satzes mit dem Ergebnisse der Sätze 11 und die damit zusammenhängende Verallgemeinerung auf ebene Figurensysteme — über die Möglichkeit der Existenz der Punkte $S_1 S_2$ für verschiedene Grössen- und Lagenverhältnisse der Figur — über die Vergleichung des Satzes 13 mit Satz 12 über die Aehnlichkeit regulärer Polygone — über die Drehungen bezw. Umklappungen, durch welche die gleichwendig bezw. gegenwendig ähnlichen Figurensysteme aus der schiefen in die perspektivische Lage übergeführt werden können u. a. sehe man in der Aufgabensammlung am Schlusse dieses Teiles.

	I	II	III	IV
Kreispaar $M_1 M_2$	gleichwendig	gleichwendig	gegenwendig	gegenwendig
Kreispaar $M_2 M_3$	gleichwendig	gegenwendig	gleichwendig	gegenwendig
Kreispaar $M_3 M_1$	gleichwendig	gegenwendig	gegenwendig	gleichwendig

Man erhält also die Aussage:

Satz 13. Drei beliebige Kreise in beliebiger Lage sind auf achtfache Weise ähnliche Figuren in schiefer Lage, nämlich je vierfach (mit dreimal gleichwendiger oder mit einmal gleichwendiger und zweimal ungleichwendiger Zuordnung) zu jedem ihrer zwei gemeinsamen Aehnlichkeitspunkte; diese entstehen als gemeinsame Schnittpunkte der drei Apollonischen Kreise, welche jede Centralstrecke im Verhältnis der zugehörigen Radien harmonisch senkrecht teilen.

5) Ueber die Potenzlinien oder Chordalen.

Frage 68. Was versteht man unter einer Potenzlinie zweier Kreise?

Antwort. Unter Potenzlinie oder Chordale zweier Kreise versteht man den geometrischen Ort für einen Punkt, der für zwei gegebene Kreise gleichgrosse (gleichartige) Potenz hat (also gleiche Tangenten oder gleiche

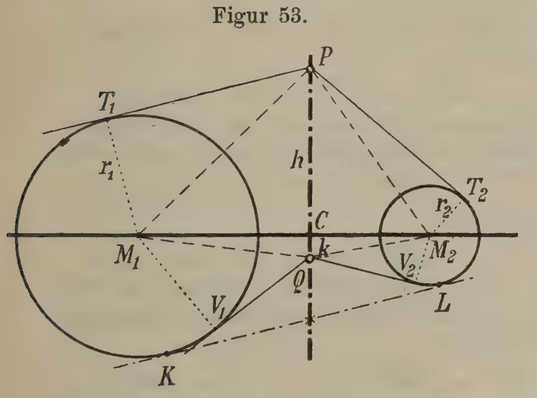
Erkl. 223. Unterscheidet man zwischen „innerer“ und „äusserer“ Potenz eines Punktes, je nachdem derselbe innerhalb oder ausserhalb des Kreises liegt, so hat man der nebenstehenden Definition beizufügen das Wort

„gleichartige“ Potenz. Nimmt man dagegen für die äussere Potenz stets das positive, für die innere Potenz stets das negative Vorzeichen, so wird diese Einschränkung entbehrlich, indem dann mit dem Worte „gleich“ überhaupt nur gleichartige Potenzwerte bezeichnet werden können.

senkrechte Halbsehnen). Der Begriff der Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis ist bereits aus Satz 1 dieses Teiles zu entnehmen.

Frage 69. Welche Beziehungen bestehen zwischen zwei Kreisen und einem Punkte gleicher äusserer Potenz?

Figur 53.



Erkl. 224. Man pflegt die Potenz des äusseren Punktes P in Figur 53 als positiv zu bezeichnen, weil die Sekantenstrecken, deren Produkt die Potenz bildet, beide von P aus nach derselben Richtung gehen, so dass auch die gleichgrossen Tangentenstrecken $PT \cdot PT$ aufeinanderfallen. Dagegen bezeichnet man die Potenz des inneren Punktes P in Figur 54 als negativ, weil die beiden Sehnenstrecken, deren Produkt die Potenz darstellt, von P aus nach entgegengesetzten Richtungen gemessen sind, so dass auch die gleichgrossen auf dem Durchmesser durch P senkrecht stehenden Halbsehnen nicht zusammenfallen.

Erkl. 225. Da in den Ausdrücken für M_1C und M_2C der Wert h gänzlich fehlt, so muss es ganz gleichgiltig sein, wie weit P von c entfernt war; M_1C und M_2C haben stets denselben Wert. — Man könnte beim umgekehrten Beweise in II auch weiter ausholen und aus den Werten:

$$M_1C = \frac{c^2 + r_1^2 - r_2^2}{2c}$$

ableiten, dass:

$$\overline{M_1C}^2 - \overline{M_2C}^2 = r_1^2 - r_2^2.$$

Man hat nämlich für den dieser vorigen Bestimmungsgleichung genügenden Punkt C:

Antwort. I. Soll P (in Fig. 53) ein äusserer Punkt der Potenzlinie sein, so muss die Potenz des Punktes P in Bezug auf beide Kreise je gleich sein dem Quadrat der Tangenten von P an den Kreis, also:

$$\overline{PT_1}^2 = \overline{PT_2}^2.$$

Nun ist aber:

$$\overline{PT_1}^2 = \overline{PM_1}^2 - r_1^2,$$
$$\overline{PT_2}^2 = \overline{PM_2}^2 - r_2^2,$$

also folgt:

$$\overline{PM_1}^2 - r_1^2 = \overline{PM_2}^2 - r_2^2$$

oder:

$$\overline{PM_1}^2 - \overline{PM_2}^2 = r_1^2 - r_2^2.$$

Bezeichnet man nun mit h den senkrechten Abstand PC des Punktes P von der Centralen M_1 und M_2 und mit c die Centralstrecke M_1M_2 selbst, so ist:

$$\overline{PM_1}^2 = h^2 + \overline{M_1C}^2,$$
$$\overline{PM_2}^2 = h^2 + \overline{M_2C}^2,$$

also:

$$\overline{PM_1}^2 - \overline{PM_2}^2 = (h^2 + \overline{M_1C}^2) - (h^2 + \overline{M_2C}^2)$$
$$= \overline{M_1C}^2 - \overline{M_2C}^2.$$

Dadurch ist aber die Lage des Punktes C bestimmt. Dieser Ausdruck ist nämlich gleich:

$$(M_1C + M_2C)(M_1C - M_2C) = c(M_1C - M_2C).$$

Setzt man also erst:

$$M_2C = c - M_1C,$$

dann:

$$M_1C = c - M_2C,$$

so findet man:

$$r_1^2 - r_2^2 = c\,(M_1C - c + M_1C),$$

bezw.:

$$r_1^2 - r_2^2 = c\,(c - M_2C - M_2C).$$

Hieraus folgt aber:

$$M_1C = \frac{1}{2}\left(\frac{r_1^2 - r_2^2}{c} + c\right) = \frac{c^2 + r_1^2 - r_2^2}{2c},$$

$$M_2C = \frac{1}{2}\left(c - \frac{r_1^2 - r_2^2}{c}\right) = \frac{c^2 - r_1^2 + r_2^2}{2c}.$$

$$\overline{M_1C}^2 - \overline{M_2C}^2 = (M_1C + M_2C)(M_1C - M_2C)$$
$$= c \cdot \frac{[c^2 + (r_1^2 - r_2^2)] - [c^2 - (r_1^2 - r_2^2)]}{2c}$$
$$= \frac{c^2 + (r_1^2 - r_2^2) - c^2 + (r_1^2 - r_2^2)}{2}$$
$$= \frac{2(r_1^2 - r_2^2)}{2} = r_1^2 - r_2^2.$$

Demnach hat der Fusspunkt der von P auf c gefällten Senkrechten eine ganz bestimmte Lage auf der Centralstrecke M_1M_2, und zwar jedesmal dieselbe Lage, wo man auch den Punkt P gewählt haben mag.

II. Wählt man umgekehrt einen beliebigen Punkt Q auf der Senkrechten, welche entweder von P auf c gefällt oder in dem zuvor berechneten Punkte C auf c errichtet ist, so wird, wenn k der Abstand QC ist:

$$\overline{QM_1}^2 = \overline{M_1C}^2 + k^2, \quad \overline{QM_2}^2 = \overline{M_2C}^2 + k^2,$$

also:

$$\overline{QM_1}^2 - \overline{QM_2}^2 = \overline{M_1C}^2 - \overline{M_2C}^2.$$

Letztere Differenz ist für den Punkt C nach vorigem gleich $r_1^2 - r_2^2$, also wird:

$$\overline{QM_1}^2 - \overline{QM_2}^2 = r_1^2 - r_2^2,$$

folglich:

$$\overline{QM_1}^2 - r_1^2 = \overline{QM_2}^2 - r_2^2.$$

Nun sind aber die Quadrate der von Q an die Kreise gezogenen Tangentenstrecken:

$$\overline{QV_1}^2 = \overline{QM_1}^2 - r_1^2, \quad \overline{QV_2}^2 = \overline{QM_2}^2 - r_2^2;$$

also hat man für jeden beliebigen Punkt Q auf obiger Senkrechten den Wert $QV_1 = QV_2$, d. h. gleiche Potenz in Bezug auf beide Kreise.

Erkl. 226. Im I. Teil nebenstehenden Beweises wird gezeigt, dass die Senkrechte von jedem Punkte P denselben Punkt C der Centrale trifft, d. h. dass jeder Punkt P, der gleiche äussere Potenz hat, auf der Senkrechten liegen muss, die in dem Punkte C erreicht ist. Im II. Teile erfolgt der Nachweis, dass jeder Punkt, welcher auf der im Punkte C errichteten Senkrechten liegt, auch gleiche Potenz haben muss. Zusammenfassung beider Aussagen liefert sodann den in Antwort 72 ausgesprochenen geometrischen Ortssatz.

Erkl. 227. Da für die Punkte P und Q auch:

$$\overline{PM_1}^2 - \overline{PM_2}^2 \text{ bezw. } \overline{QM_1}^2 - \overline{QM_2}^2$$

einen feststehenden Wert $r_1^2 - r_2^2$ hat, so kann man schon an dieser Stelle den Ortssatz aussprechen:

Satz. Der geometrische Ort für einen Punkt P, dessen Abstandsquadrate von zwei festen Punkten M_1M_2 einen konstanten Wertunterschied haben, ist die Senkrechte in demjenigen Punkte der Verbindungsstrecke M_1M_2, welcher derselben Bedingung genügt.

Erkl. 228. Vier Punkte, welche jedenfalls gleiche Potenz, nämlich gleiche Tangentenlängen an beide Kreise liefern, sind im voraus bekannt: es sind die Halbierungspunkte der vier gemeinsamen Tangenten beider Kreise. Man kann daher hier die Aussage machen, dass die Halbierungspunkte aller vier gemeinsamen Tangenten auf einer Geraden liegen. (Diese muss allerdings schon der Symmetrie wegen auf der Centralen senkrecht stehen.)

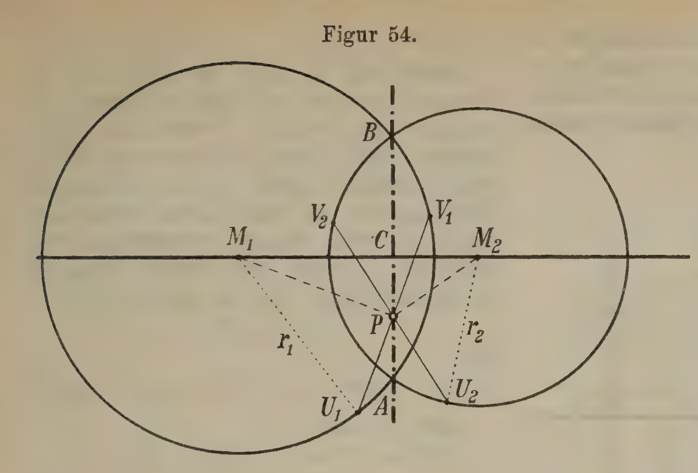
Frage 70. Welche Beziehungen bestehen zwischen zwei Kreisen und einem Punkte gleicher innerer Potenz?

Antwort. I. Punkte mit gleicher innerer Potenz können nur bei zwei schneidenden Kreisen entstehen. Ist P in Figur 54 ein solcher Punkt im Innern zweier Kreise, so kann man genau dieselbe Rechnung durchführen, wie zuvor für den äusseren Punkt. Die Potenz ist nämlich gleich dem Quadrate der auf dem Durchmesser des Punktes P senkrechten Halbsehne, also:

$$\overline{PU_1}^2 = \overline{PU_2}^2.$$

Erkl. 229. Die Durchmesser des Punktes P in Figur 54 haben die Richtung PM_1 bezw. PM_2. Darauf senkrecht stehen die gleichen Halbsehnen PU_1 und PU_2, so dass ein Kreis um P mit Radius PU_1 auch durch die andern drei Endpunkte $U_2V_1V_2$ dieser Sehnen gehen müsste. Da der Radius r_2 der kleinere ist, so ist das Segment ABV_2 grösser als ABV_1; PV_1 bildet mit der gemeinsamen Sehne AB einen kleineren spitzen (grösseren stumpfen) Winkel als PV_2, dagegen mit der Centrale M_1M_2 einen grösseren

Figur 54.



Nun ist aber:

$$\overline{PU_1}^2 = r_1^2 - \overline{PM_1}^2$$

und

$$\overline{PU_2}^2 = r_2^2 - \overline{PM_2}^2,$$

also folgt:

$$r_1^2 - \overline{PM_1}^2 = r_2^2 - \overline{PM_2}^2$$

oder:

$$\overline{PM_1}^2 - \overline{PM_2}^2 = r_1^2 - r_2^2.$$

Dies ist aber genau dieselbe Bedingung für P und die Senkrechte PC von diesem Punkte auf die Centralstrecke, wie in voriger Antwort; also wird auch für C und einen beliebigen Punkt Q derselben Senkrechten dasselbe Ergebnis folgen.

II. Bei schneidenden Kreisen lässt sich aber überhaupt die ganze Betrachtung auf eine einfachere Weise durchführen. Da nämlich die Kreise eine gemeinsame Sehne AB haben, so ist $PA \cdot PB$ für jeden beliebigen (äusseren oder inneren) Punkt dieser Sekante die Potenz sowohl für den einen, als auch für den andern Kreis. Damit ist für die Giltigkeit des zweiten Teiles der vorigen Antwort 69 auch hier der Nachweis erbracht. — Dass dann auch auf dieser gemeinsamen Sehne jeder Punkt P liegen muss, der gleiche Potenz besitzt in Bezug auf beide Kreise, lässt sich beweisen durch die Verbindungsgerade dieses Punktes P mit einem der Schnittpunkte beider Kreise, z. B. mit A. Es muss nämlich auf der Sekante PA durch jede Kreislinie ein zweiter Abschnitt PB_1 bezw. PB_2 abgeschnitten werden, und zwar so, dass:

$$PA \cdot PB_1 = PA \cdot PB_2.$$

Dies ist aber nur möglich, wenn:

$$B_1 = B_2 = B$$

ist, d. h. wenn PA durch den Schnittpunkt B geht, also wenn die Gerade PA mit der Sehne AB zusammenfällt.

spitzen (kleineren stumpfen) Winkel als PV_2; der senkrechte Abstand der Punkte U_1 und V_1 von der Centralen ist grösser als der Abstand der Punkte $U_2 V_2$.

Erkl. 230. Aus nebenstehender Betrachtung schliesst man die früher noch nicht hervorgehobene Thatsache, dass der Schnittpunkt C der gemeinsamen Sehne AB mit der Centralen $M_1 M_2$ eine ganz bestimmte Lage hat, nämlich wenn $r_1 > r_2$ gesetzt wird:

$$M_1 C = \frac{c^2 + (r_1^2 - r_2^2)}{2c},$$

$$M_2 C = \frac{c^2 - (r_1^2 - r_2^2)}{2c},$$

also:

$$M_1 C > M_2 C.$$

Auch die Figur bestätigt, dass dieser Punkt C stets näher beim Mittelpunkte des kleineren Kreises liegt als bei dem des grösseren. Da nämlich im gleichschenkligen Dreieck AM_1B die Schenkel länger sind als im Dreieck AM_2B, die Grundseite AB aber gemeinsam ist, so muss die Höhe CM_1 des ersteren grösser sein als die Höhe CM_2 des zweiten.

Erkl. 231. Um die vorerwähnte Berechnung des Punktes C unmittelbar auszuführen, setzt man für das Dreieck $M_1 M_2 B$ den verallgemeinerten Pythagoreischen Lehrsatz an. In dessen Gleichungen:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cq$$

bezw.:

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2cp$$

sind nämlich nach Figur 54 zu ersetzen:

$$a = r_2, \quad b = r_1, \quad c = M_1 M_2,$$
$$p = M_2 C, \quad q = M_1 C,$$

also folgt aus:

$$p = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}, \quad q = \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2c}$$

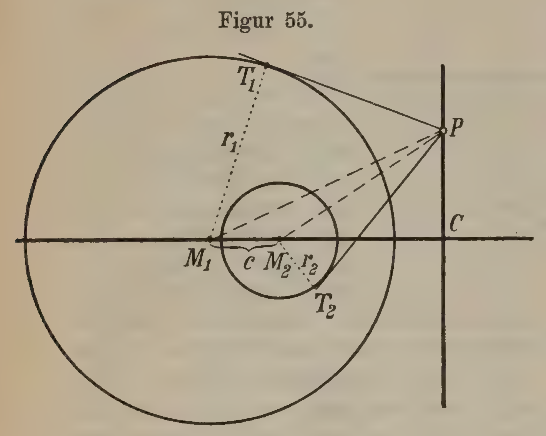
entsprechend wie oben:

$$M_1 C = \frac{c^2 + r_1^2 - r_2^2}{2c},$$

$$M_2 C = \frac{c^2 - r_1^2 + r_2^2}{2c}.$$

Frage 71. Welche Beziehungen bestehen zwischen zwei ineinanderliegenden oder zwei einander berührenden Kreisen und einem Punkte gleicher Potenz?

Figur 55.



Erkl. 232. In Figur 55 ist, ebenso wie in Figur 53 für jeden der beiden Kreise nur eine der beiden Tangenten gezogen, um die Uebersichtlichkeit der Figur eher zu wahren für die Dreiecke MPT. Diese würden miteinander zum Teil zur Deckung gekommen sein, während so $\triangle M_1PT_1$ ganz von M_2PT_2 getrennt liegend betrachtet werden kann.

Erkl. 233. Es ist zu beachten, dass der Wert M_1C, also der Abstand des Punktes C vom Mittelpunkte des grösseren Kreises in allen betrachteten Fällen denselben Wert behält. Dass M_2C das Vorzeichen wechselt und nur den absoluten Wert beibehält, ist in doppelter Weise erklärbar:

Erstens ist in Figur 53 u. 54 CM_2 die Fortsetzung von M_1C, in Figur 55 dagegen geht CM_2 vom Punkte C aus wieder rückwärts. Ferner ist in Figur 55 $c + r_2 < r_1$, also jedenfalls $c^2 + r^2_2 < r_1^2$ und folglich $c^2 + r_2^2 - r_1^2$ negativ. Damit also M_2C einen positiven Wert erhalten kann, muss das Vorzeichen umgekehrt werden.

Antwort. I) Liegt der Kreis M_2 im Kreise M_1 eingeschlossen (Figur 55), so kann die innere Potenz nie gleich werden, da ja keine gleichgrossen Halbsehnen möglich sind. Gleiche Tangenten dagegen an beide Kreise sind möglich von einem Punkte P ausserhalb des grösseren Kreises. Für diesen Punkt P ist dann wieder, wie in Antwort 69:

$$\overline{PT_1}^2 = \overline{PT_2}^2,$$

also:

$$\overline{PM_1}^2 - \overline{PM_2}^2 = r_1^2 - r_2^2 = \overline{M_1C}^2 - \overline{M_2C}^2.$$

Hier ist aber:

$$M_1C - M_2C = c, \quad M_1C = M_2C + c,$$
$$M_2C = M_1C - c,$$

also:

$$r_1^2 - r_2^2 = \overline{M_1C}^2 - \overline{M_2C}^2 = c(M_1C + M_2C)$$
$$= c(2M_2C + c) = c(2M_1C - c).$$

Daraus folgt:

$$M_1C = \frac{c^2 + r_1^2 - r^2_2}{2c}$$

$$M_2C = \frac{r_1^2 - r_2^2 - c^2}{2c} = -\frac{c^2 - r_1^2 + r_2^2}{2c}.$$

Und ebenso alle übrigen Untersuchungen: übereinstimmend mit Antwort 69, indem der Ausdruck für M_1C denselben Wert, jener für M_2C den entgegengesetzten Wert hat.

II) Für berührende Kreise ist schon in Antwort 120 des IV. Teiles dieses Lehrbuches nachgewiesen worden, dass „von jedem Punkte der gemeinsamen Tangente im Berührungspunkte drei gleichlange Tangentenabschnitte an beide Kreise gehen.“

Frage 72. Wie lassen sich die bisherigen Ergebnisse in Worten zusammenfassen?

Erkl. 234. Für zwei auseinanderliegende oder zwei ineinanderliegende Kreise (Figur 53 oder 55) durchläuft der Wert der Potenz für die einzelnen Punkte der Potenzlinie alle Grössen von unendlich bis zu dem kleinsten Werte, den die Potenz im Punkte C annimmt. Denn dieser ist der nächste Punkt der Potenzlinie beim

Antwort. Als Gesamtergebnis der Antworten auf die Fragen 68—71 erhält man den Satz:

Satz 14. Der geometrische Ort für einen Punkt, welcher in Bezug auf zwei beliebig gegebene Kreise mit Radien r_1 und r_2 gleichgrosse Potenz hat, ist eine auf der Central-

Kreismittelpunkte, also ist auch die Länge der Tangente von dort aus am kleinsten. Und die Potenz wird:

$$\overline{M_1 C}^2 - r_1^2 = \overline{M_2 C}^2 - r_2^2$$
$$= \left(\frac{r_1^2 + r_2^2 - c^2}{2c}\right)^2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{c^2}$$

Für die Potenzlinie zweier berührenden Kreise geht der Wert der Potenz von unendlich bis herunter zu Null: für den Berührungspunkt. Für die Potenzlinie schneidender Kreise geht der Wert noch durch Null hindurch bis zu dem negativen Wert im Punkte C, nämlich:

$$r_1^2 - \overline{M_1 C}^2 = r_2^2 - \overline{M_2 C}^2$$
$$= \frac{r_1^2 r_2^2}{c^2} - \left(\frac{r_1^2 + r_2^2 - c^2}{2c}\right)^2$$

Erkl. 235. Setzt man in dem Ausdruck:

$$M_1 C = \frac{c^2 + r_1^2 - r_2^2}{2c}$$
$$= \frac{c^2 + (r_1 + r_2)(r_1 - r_2)}{2c}$$

den Wert:

$$c = r_1 \pm r_2,$$

welcher für berührende Kreise entsteht, so erhält man nach Kürzung mit c:

$$M_1 C = \frac{(r_1 \pm r_2) + (r_1 \mp r_2)}{2} = \frac{2r_1}{2} = r_1,$$

also stets die Tangente als Potenzlinie.

strecke c beider Kreise senkrechte Gerade, deren Fusspunkt vom Mittelpunkte M_1 des grösseren Kreises den Abstand:

$$\frac{c^2 + r_1^2 - r_2^2}{2c}$$

hat (gemessen in der Richtung von M_1 gegen M_2).

Satz 14a. Die Potenzlinie (oder Chordale) fällt für zwei auseinanderliegende Kreise zusammen mit der Verbindungsgeraden der Halbierungspunkte der gemeinsamen Tangenten, für schneidende Kreise mit der gemeinsamen Sehne, für berührende Kreise mit der gemeinsamen Tangente im Berührungspunkte.

Frage 73. Welche Eigenschaften zeigt ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Potenzlinie zweier gegebenen Kreise liegt, und dessen Radius eine der gleichlangen Tangenten an beide Kreise ist?

Antwort. I) Zieht man vom Punkte P der Potenzlinie die gleichlangen Tangenten $PT_1 = PT_2$ und nimmt diese als Radien eines Kreises, so ist PT_1 als Tangente senkrecht auf dem Radius $T_1 M_1$, aber auch umgekehrt $M_1 T_1$ senkrecht auf dem Radius PT_1.

Daher ist sowohl der Radius PT_1 Tangente des Kreises M_1, als auch der Radius $M_1 T_1$ Tangente des Kreises um P. Die beiden Tangenten in dem Schnittpunkte der Kreise stehen senkrecht aufeinander, und man sagt, die Kreise schneiden einander rechtwinklig, oder jeder ist ein Orthogonalkreis des andern.

Dieser rechte Winkel der Tangenten wiederholt sich aber, wie im Punkte T_1, so auch im Punkte T_2, und wegen der Symmetrie zur Centralen PM_1 bezw. PM_2 auch in V_1 bezw. V_2, also ist der Kreis um P ein gemeinsamer Orthogonalkreis der Kreise M_1 und M_2.

Erkl. 236. Wenn zwei ganz beliebige krumme Linien einander schneiden, so spricht man doch stets von dem Schnittwinkel, unter welchem sie sich treffen. Zur Bestimmung dieses Winkels zieht man in dem Schnittpunkte beider Kurven an jede derselben die Tangente, und der Winkel dieser Tangenten ist dann der Schnittwinkel der Kurven. Dies gilt also, wie bei allen Kurven, so auch bei den Kreisen der Figur 56, und die Winkel:

$$M_1 T_1 P = M_2 T_2 P = M_1 V_1 P = M_2 V_2 P = 90^0$$

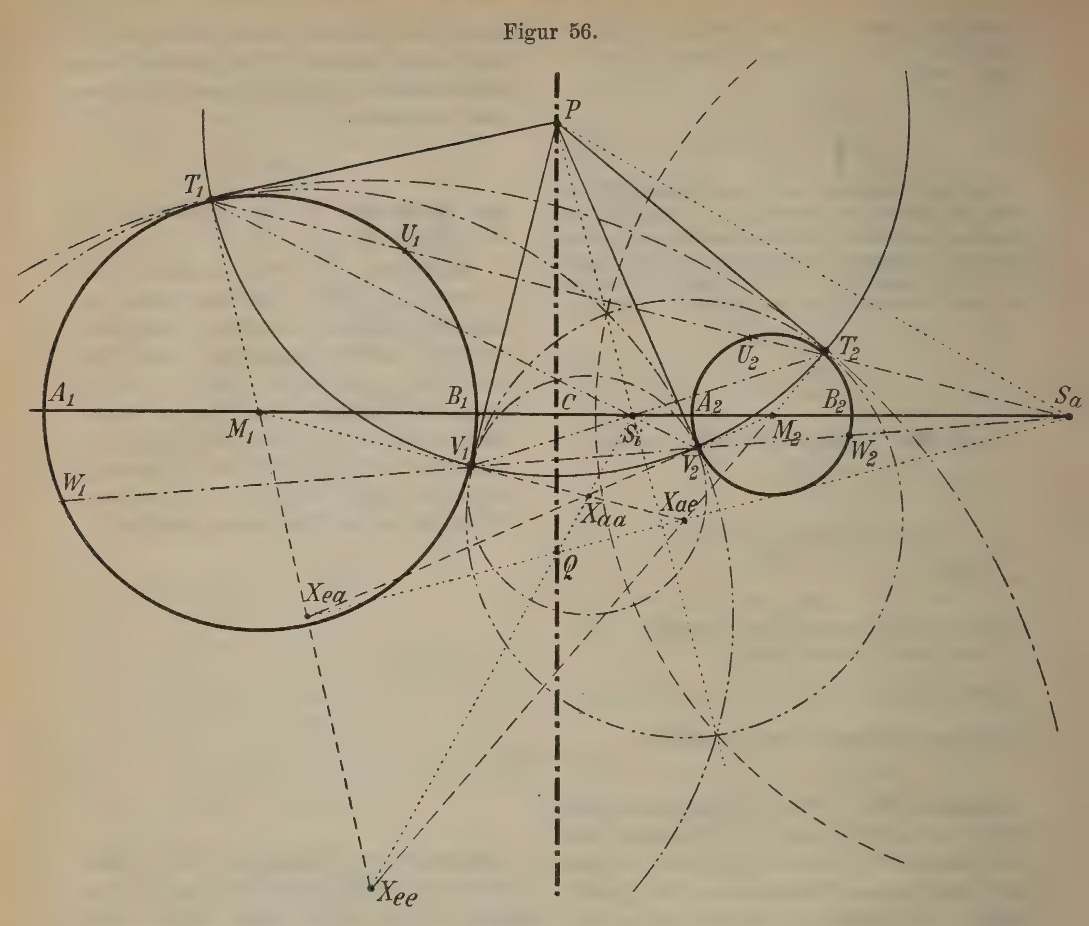
geben jeweils den Winkel der beiden Kreise, welche sich in den Punkten T_1, T_2, V_1, V_2 schneiden.

Erkl. 237. Das Viereck $PT_1 T_2 X_{ee}$ hat zwei gleiche Seiten am Eckpunkte P:

$$PT_1 = PT_2,$$

ferner zwei gleiche Winkel von je 90⁰ an den Eckpunkten $T_1 T_2$, folglich ist das Viereck ein Deltoid (siehe Satz 80 und Antwort 160 des

Figur 56.



III. Teiles dieses Lehrbuches), und die übrigen Seiten müssen ebenfalls gleich sein:

$$T_1 X_{ee} = T_2 X_{ee}.$$

Ohne auf das Deltoid zurückzugehen, kann man auch die Dreiecke PT_1T_2 und $X_{ee}T_1T_2$ einzeln betrachten: PT_1T_2 ist gleichschenklig, weil:

$$PT_1 = PT_2,$$

folglich ist:

$$\sphericalangle PT_1T_2 = PT_2T_1.$$

Daher ist auch im Dreieck $X_{ee}T_1T_2$ der

$$\sphericalangle XT_1T_2 = 90^0 - PT_1T_2 = 90^0 - PT_2T_1$$
$$= \sphericalangle XT_2T_1.$$

Dadurch wird aber das Dreieck XT_1T_2 gleichschenklig, also:

$$T_1 X_{ee} = T_2 X_{ee}.$$

Erkl. 238. Nach der in voriger Erkl. 237 durchgeführten Betrachtungsweise findet man die vier gleichschenkligen Dreiecke:

Ueber Grundseite T_1T_2 Dreieck $T_1T_2X_{ee}$, also $T_1X_{ee} = T_2X_{ee}$;
„ „ T_1V_2 Dreieck $T_1V_2X_{ea}$, also $T_1X_{ea} = V_2X_{ea}$;

II. Bringt man die Radien M_1T_1 und M_2T_2 und ebenso die Radien M_1V_1 und M_2V_2 sämtlich zum Schnitt, so entstehen Vierecke, wie PT_1T_2X bezw. PV_1V_2X, in welchen die Seiten von T_1T_2 bezw. V_1V_2 nach der vierten Ecke X gleichlang sind (siehe Erkl. 237). Folglich kann man mit Radius $X_{aa}V_1 = X_{aa}V_2$ bezw. $X_{ee}T_1 = X_{ee}T_2$ einen Kreis beschreiben, welcher beide gegebenen Kreise M_1M_2 ausschliessend bezw. einschliessend berührt; und mit Radius $X_{ae}T_2 = X_{ae}V_1$ bezw. $X_{ea}T_1 = X_{ea}V_2$ einen Kreis, welcher e i n e n der beiden gegebenen Kreise M_1M_2 einschliessend, den a n d e r n ausschliessend berührt. Daraus folgt aber auch wieder rückwärts, dass T_1T_2 bezw. V_1V_2 als Berührungspunkte die an den Figuren 45 und 46 betrachtete Eigenschaft haben müssen, dass nämlich die

Ueber Grundseite $V_1 T_2$ Dreieck $V_1 T_2 X_{ae}$, also $V_1 X_{ae} = T_2 X_{ae}$;
„ „ $V_1 V_2$ Dreieck $V_1 V_2 X_{aa}$, also $V_1 X_{aa} = V_2 X_{aa}$.

Da nun die Geraden TX, VX jeweils durch die Kreismittelpunkte $M_1 M_2$ gehen, so müssen die Kreise mit Radien MT, MV und jene mit Radien XT, XV einander berühren (Satz 34 des IV. Teiles dieses Lehrbuches).

Erkl. 239. Verbindet man die Mittelpunkte M mit den weiteren Schnittpunkten der Geraden $T_1 T_2$, $T_1 V_2$, $V_1 T_2$, $V_1 V_2$, so entstehen gleichschenklige Dreiecke, z. B. $T_1 M_1 U_1$, worin:

$$\sphericalangle M_1 U_1 T_1 = \sphericalangle M_1 T_1 U_1.$$

Nun ist aber nach Erkl. 237 bezw. 238:

$$\sphericalangle M_1 T_1 U_1 = M_2 T_2 T_1,$$

also wird:

$$M_1 U_1 \parallel M_2 T_2,$$

und ebenso:

$$M_1 W_1 \parallel M_2 V_2, \; M_2 U_2 \parallel M_1 T_1, \; M_2 W_2 \parallel M_1 V_1.$$

Demnach sind $U_1 T_2$ und $W_1 V_2$ Verbindungsgeraden der Endpunkte paralleler und gleichgerichteter Radien, also äussere, $T_1 V_2$ und $T_2 V_1$ Verbindungsgeraden der Endpunkte paralleler und entgegengesetzt gerichteter Radien, also innere Aehnlichkeitsstrahlen durch S_a bezw. S_i.

Verbindungsgeraden $T_1 T_2$ und $V_1 V_2$ durch den äusseren, die Verbindungsgeraden $T_1 V_2$ und $T_2 V_1$ durch den inneren Aehnlichkeitspunkt der beiden Kreise $M_1 M_2$ gehen müssen, indem für den äusseren Aehnlichkeitspunkt die Punkte $T_1 T_2$, $V_1 V_2$, für den inneren Aehnlichkeitspunkt die Punkte $T_1 V_2$ und $T_2 V_1$ potenzhaltende oder inverse Punkte der entsprechenden Aehnlichkeitsstrahlen sind.

Frage 74. Welche Erweiterung erfährt Satz 14 durch vorstehende Betrachtungen?

Antwort. Man erhält folgende Aussage als Zusammenfassung voriger Ergebnisse:

Satz 14b. Die Ortslinie für einen Punkt gleicher äusserer Potenz zweier Kreise ist zugleich geometrischer Ort für den Mittelpunkt eines gemeinsamen Orthogonalkreises der beiden gegebenen Kreise. Die vier Schnittpunkte jedes gemeinsamen Orthogonalkreises liegen zu je zwei Paaren auf einem äusseren bezw. inneren Aehnlichkeitsstrahl der beiden Kreise; sie sind inverse Punkte und damit Berührungspunkte von vier Kreisen, welche die beiden gegebenen Kreise gleichartig bezw. ungleichartig berühren.

Erkl. 240. Zwischen Aehnlichkeitspunkten und Potenzlinie besteht nach den vorliegenden Untersuchungen folgender Zusammenhang: Kennt man die Potenzlinie, so erhält man die Aehnlichkeitspunkte als gemeinsame Schnittpunkte der Verbindungsgeraden der Schnittpunkte jedes Orthogonalkreises mit beiden Kreisen: die einen gehen durch S_a, die andern durch S_i. — Kennt man umgekehrt die Aehnlichkeitspunkte, so erhält man die Potenzlinie als Ort der Schnittpunkte je zweier in inversen Punkten an die beiden Kreise gezogenen Tangenten. Denn sind $T_1 T_2$ solche inverse Punkte, so muss:

$$T_1 P = T_2 P$$

werden, da beides Tangentenabschnitte an den Berührungskreis sind, welcher in $T_1 T_2$ die Kreise $M_1 M_2$ berührt.

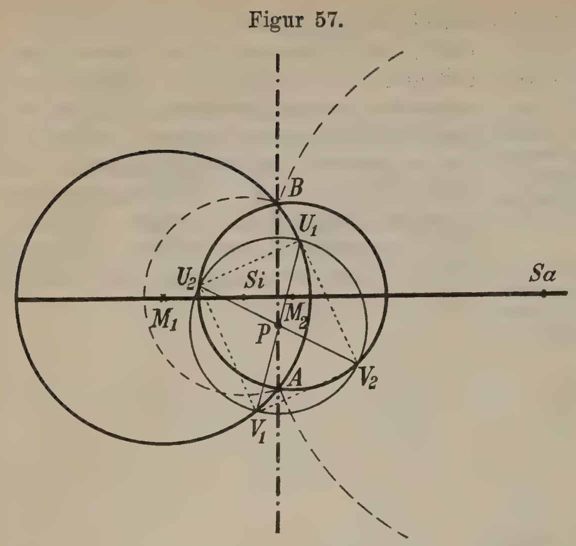
Frage 75. Welche Eigenschaften zeigt ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der gemeinsamen Sehne zweier Kreise liegt, und dessen Radius eine der gleichlangen senkrechten Halbsehnen beider Kreise ist?

Antwort. Da:

$$PU_1 = PV_1 = PU_2 = PV_2,$$

so sind $U_1 V_1$ und $U_2 V_2$ Durchmesser des Kreises um P; der Kreis um P hat also die Eigenschaft, dass die durch

Figur 57.



Kreis M_1 und die durch Kreis M_2 ausgeschnittene Sehne jedesmal Durchmesser ist. Man sagt, der Kreis P wird von den beiden Kreisen M_1 und M_2 „unter einem Durchmesser" oder „unter einem Halbkreis" geschnitten, und man findet:

Satz 14c. Die Ortslinie für einen Punkt gleicher innerer Potenz zweier Kreise ist zugleich geometrischer Ort für den Mittelpunkt eines Kreises, welcher von den beiden gegebenen Kreisen unter einem Durchmesser geschnitten (halbiert) wird.

Erkl. 241. Da von einem inneren Punkte keine Tangenten ausgehen können, so kann Satz 14b bei schneidenden Kreisen nur für äussere Punkte der gemeinsamen Sehne AB Geltung haben. — Die Verbindungsgeraden $V_1 V_2 U_1 U_2$ bilden ein Rechteck, da die Diagonalen gleich sind. Man kann daher die Strecke AB auch als den Ort für den Mittelpunkt eines Rechtecks bezeichnen, von dem je zwei Gegenecken auf den beiden gegebenen Kreislinien liegen. Da nun:

$$V_1 U_2 \parallel V_2 U_1 \text{ und } V_1 V_2 \parallel U_1 U_2,$$

so haben die Verbindungsgeraden $V_1 V_2$, $U_1 U_2$, $V_1 U_2$, $V_2 U_1$ auch nicht dieselbe Beziehung zum Aehnlichkeitspunkte, also auch nicht zu den Berührungskreisen der gegebenen Kreise M_1 und M_2, wie dies für äussere Punkte P der Fall war.

Frage 76. Wie lassen sich die vorigen Betrachtungen auf drei Kreise ausdehnen?

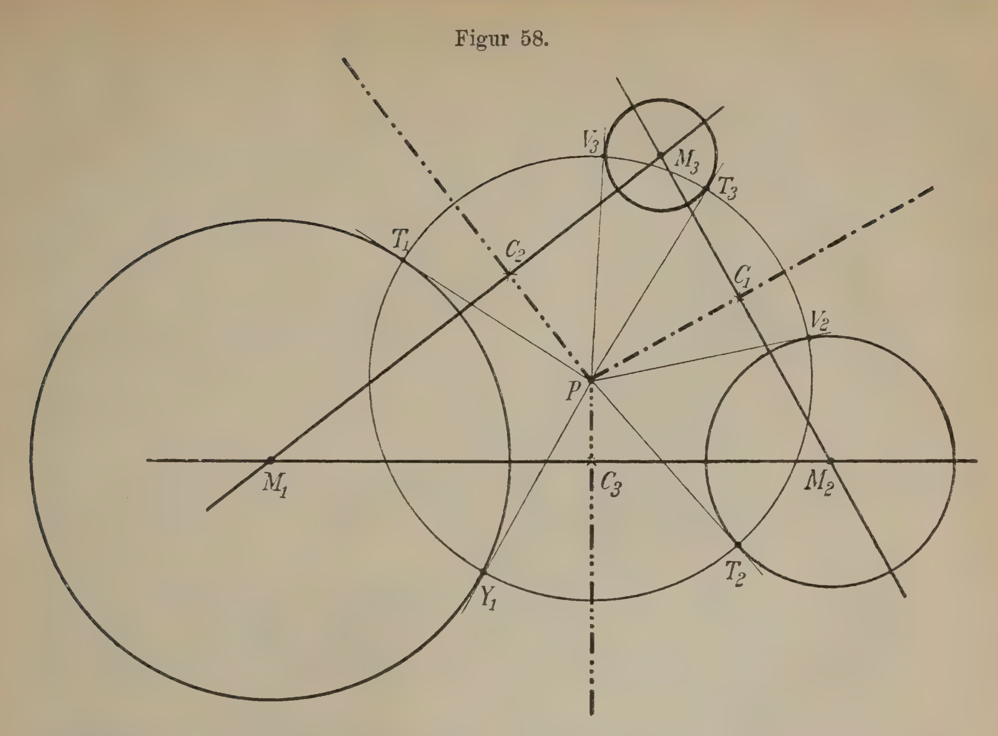
Antwort. Drei Kreise liefern durch ihre paarweise Gruppierung drei Paare, nämlich $M_1 M_2$, $M_2 M_3$, $M_3 M_1$, also auch drei Potenzlinien. Bringt man nun die Potenzlinien des Kreispaares $M_1 M_2$ und des Kreispaares $M_2 M_3$ zum Schnitt, so ist wegen der ersten Potenzlinie die Potenz des Schnittpunktes P in Bezug auf den Kreis M_1 gleich der Potenz von P in Bezug auf Kreis M_2, und wegen der zweiten Potenzlinie ist diese Potenz des Punktes P in Bezug auf den Kreis M_2 auch gleich der Potenz des Punktes P in Bezug auf den Kreis M_3. Also hat Punkt P gleiche Potenz in Bezug auf alle drei Kreise. Hierin liegt aber ausgesprochen, dass er auch gleiche Potenz hat in Bezug anf das Kreispaar M_1 und M_3. Und da alle Punkte, welche in Bezug auf diese beiden Kreise gleiche Potenz haben, auf der Potenzlinie des Kreispaares $M_3 M_1$

Erkl. 242. In Figur 58 enthalten die Potenzlinien PC_1, PC_2, PC_3 (welche der Deutlichkeit wegen nicht über den Punkt P hinaus verlängert sind) der Kreispaare $M_2 M_3$, $M_3 M_1$, $M_1 M_2$ jedesmal nur Punkte gleicher äusserer Potenz. Daher hat auch Punkt P für alle drei Kreise gleiche äussere Potenz, und es gehen von P an die drei Kreise gleichlange Tangenten:

$$PT_1 = PT_2 = PT_3 = PV_1 = PV_2 = PV_3.$$

Der Kreis, welcher einen dieser gleichlangen Tangentenabschnitte als Radius hat, geht durch alle sechs Berührungspunkte und schneidet in jedem dieser Punkte den getroffenen Kreis rechtwinklig, indem PT und MT senkrechtstehen und je Radius des einen bezw. Tangente des andern Kreises sind. Daher liegen die Punkte $T_{123} V_{123}$ auf dem gemeinsamen Orthogonalkreise um P für die drei Kreise $M_1 M_2 M_3$.

Figur 58.



Erkl. 243. Wenn die beiden ersten Kreise $M_1 M_2$ ganz auseinander oder ganz ineinander liegen, d. h. wenn überhaupt zwei von den drei Kreisen diese Lagenbeziehung aufweisen, so hat jeder Punkt ihrer Potenzlinie nur äussere Potenz in Bezug auf Kreis M_1 und auf Kreis M_2. Dann kann P also auch für den Kreis M_3 nur äussere Potenz haben, wie auch der dritte Kreis zu den andern zugesellt wird; denn nach der Definition ist die Potenzlinie der Ort gleicher und gleichartiger Potenz (vergl. Erkl. 223).

Erkl. 244. Wenn dagegen die beiden ersten Kreise $M_1 M_2$ einander schneiden, so enthält ihre Potenzlinie (äussere) Punkte mit gleicher äusserer und (innere) Punkte mit gleicher innerer Potenz. Hier ist also zu unterscheiden, ob die zweite (und dritte) Potenzlinie die erste aussen oder innen trifft. Auf Grund der Erkl. 243 ist hier überhaupt nur noch der Fall zu betrachten, dass der dritte Kreis beide anderen schneidet. Dies kann aber so eintreten, dass das den beiden ersten Kreisen gemeinsame Flächenstück von der dritten Kreislinie durchschnitten wird oder nicht. Im ersteren Falle (Figur 59) ist das abgeschnittene Flächenstück allen drei Kreisen gemeinsam, innerhalb dieses Flächenstücks schneiden sich die drei gemeinsamen Sehnen, und ihr Schnittpunkt P ist Potenzmittelpunkt von gleicher innerer Potenz in Bezug auf alle drei Kreise, und ist Mittelpunkt eines Kreises, welcher von allen drei Kreisen unter einem

liegen müssen, so liegt P auch auf der dritten Potenzlinie, oder die dritte Potenzlinie geht ebenfalls durch den Punkt P. Daher wird P Potenzpunkt oder Potenzmittelpunkt der drei Kreise genannt. Derselbe hat in Bezug auf alle drei Kreise dieselbe äussere Potenz, wie in Figur 58, oder in Bezug auf alle drei Kreise dieselbe innere Potenz, wie in Figur 59.

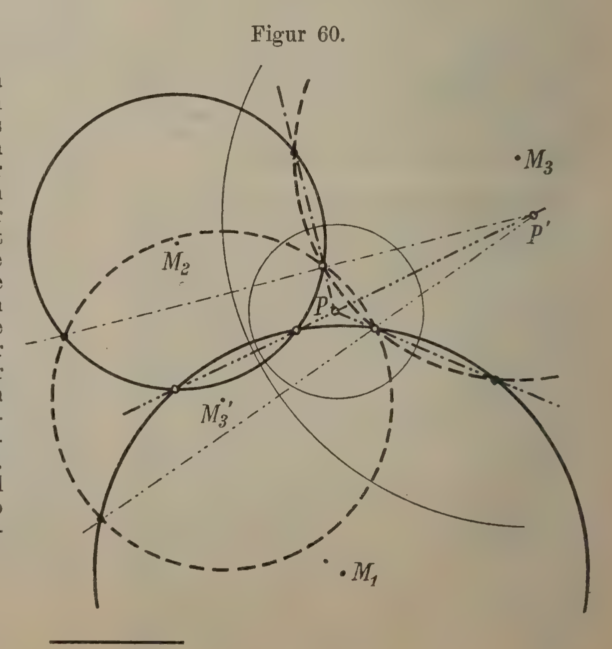
Man erhält daher die Aussage:

Satz 15. Die drei Potenzlinien dreier Kreise gehen alle durch einen Punkt gleicher Potenz für alle drei Kreise. Dieser „Potenzmittelpunkt" ist entweder — wenn er ausserhalb liegt — der Mittelpunkt eines gemeinsamen Orthogonalkreises der drei Kreise, oder — wenn er innerhalb liegt — der Mittelpunkt eines Kreises, der von den drei andern Kreisen unter einem Durchmesser (Halbkreis) geschnitten wird.

Figur 59.

Durchmesser (Halbkreis) geschnitten wird. Im andern Falle jedoch treffen sich die drei Sekanten ausserhalb des den zwei ersten Kreisen gemeinsamen Flächenstückes; dabei gibt es entweder zwischen den drei Kreisen ein Flächenstück, welches keinem der drei Kreise angehört, und dann liegt darin der gemeinsame äussere Potenzpunkt; oder die dritte Kreislinie umschliesst völlig das den beiden ersten Kreisen gemeinsame Flächenstück, und dann liegt der Potenzpunkt wieder ausserhalb der drei Kreise. In jedem der letzten Fälle, die in Figur 60 beide dargestellt sind, gibt es einen gemeinsamen Orthogonalkreis der drei Kreise. Und Fig. 59 zeigt den einzigen Fall der Lagenbeziehung dreier Kreise, wo ein solcher Orthogonalkreis unmöglich ist.

Figur 60.



Frage 77. Welche Folgerungen ergeben sich aus dem vorigen Satze 15?

Antwort. 1) Wenn die drei Kreislinien sämtlich ganz getrennt von einander liegen, so dass keinerlei Berührungen oder Schnitte vorkommen, so ist (wie in Figur 58) die Aufsuchung des Potenzpunktes bezw. der drei Potenzlinien ein verhältnismässig umständliches. Dies kann nun dadurch vereinfacht werden, dass man einen beliebigen Kreis hinzunimmt, der die zwei oder drei gegebenen Kreise alle schneidet. Da bei schneidenden Kreisen die gemeinsame Sehne Potenzlinie ist, so erhält man sofort mit blosser Anwendung des Lineals Punkte der Potenzlinie der gegebenen Kreise, und man braucht nur noch die Senkrechte auf die Centrale zu fällen.

2) Ferner liefert Satz 15 eine ganze Menge von einzelnen Fällen sowohl allgemeiner als besonderer Natur. So ist es z. B. eine Folgerung daraus, dass wenn zwei beliebig gegebene Kreise $M_1 M_2$ von irgendwelchen andern Kreisen geschnitten oder berührt werden, dann die Schnittpunkte der sämtlichen in den Kreisen M_1 und M_2 entstehenden Sehnen oder Tangenten stets auf einer Geraden liegen müssen.

3) Unter den Einzelfällen des Satzes 15 befinden sich auch solche Sätze, welche schon früher bewiesen worden sind, und nunmehr als zusammenhängende Unterfälle einer wichtigen Allgemeinbeziehung erkannt werden. So gehen durch einen gemeinsamen Schnittpunkt: die drei gemeinsamen Tangenten in den Berührungspunkten dreier einander paarweise berührenden Kreise, — die gemeinschaftliche Sehne zweier Kreise und die beiden gemeinsamen Tangenten in den Berührungspunkten eines dritten Kreises mit beiden gegebenen, — die gemeinschaftliche Tangente im Berührungspunkte zweier Kreise und die beiden gemeinsamen Sehnen, unter denen diese beiden Kreise von einem dritten Kreise geschnitten werden, — die drei gemeinsamen Sehnen dreier einander paarweise schneidenden Kreise.

Erkl. 245. Die nebenstehende erste Folgerung ist geeignet als Hilfsmittel zur Konstruktion der Potenzlinie zweier Kreise, bei denen die Zusätze des Satzes 14a nicht anwendbar sind, also besonders bei zwei ineinander liegenden Kreisen (Figur 55). Schneidet man dort die Kreise M_1 und M_2 durch einen beliebigen Schnittkreis M_3 etwa in den Sehnen $V_1 U_1$ bezw. $V_2 U_2$, so erhält man als Schnittpunkt der gemeinsamen Sehnen einen Punkt Q, dessen Potenz für den Kreis M_1 gleich $QV_1 \cdot QU_1$, für Kreis M_2 gleich $QV_2 \cdot QU_2$ ist. Da aber die Sehnen $V_1 U_1$ und $V_2 U_2$ auch im Kreis M_3 liegen, so ist wegen des Kreises M_3 auch:

$$QV_1 \cdot QU_1 = QV_2 \cdot QU_2;$$

also ist Q ein Punkt der Potenzlinie für die Kreise M_1 und M_2. Zieht man also von Q die Senkrechte auf die Centrale $M_1 M_2$, so ist dies die Potenzlinie selbst.

Erkl. 246. Ueberblickt man in Rücksicht des Satzes 15 die Figuren 43 bis 46 und 56 dieses Teiles, so erkennt man, dass auf einer Geraden liegen müssen: in Figur 43 und 44 jeweils die Schnittpunkte der vier Sekantenpaare:

$$P_1 A_1 \text{ und } Q_2 B_2, \quad P_1 B_1 \text{ und } Q_2 A_2,$$
$$Q_1 A_1 \text{ und } P_2 B_2, \quad Q_1 B_1 \text{ und } P_2 A_2.$$

Diese Gerade ist die Potenzlinie der Kreise $M_1 M_2$, und wenn deren Radien und Centrale $M_1 M_2$ in beiden Figuren gleichgross gewählt sind, so liegen alle acht Schnittpunkte auf derselben Geraden. — Ebenso liegen auf derselben Geraden in Figur 45 und 46 jeweils die Schnittpunkte der Tangenten in den Punkten P_1 und Q_2, P_2 und Q_1, und auch diese vier Punkte liegen mit den vorigen acht Punkten auf der gleichen Geraden, wenn dieselben Kreise $M_1 M_2$ zu Grunde liegen.

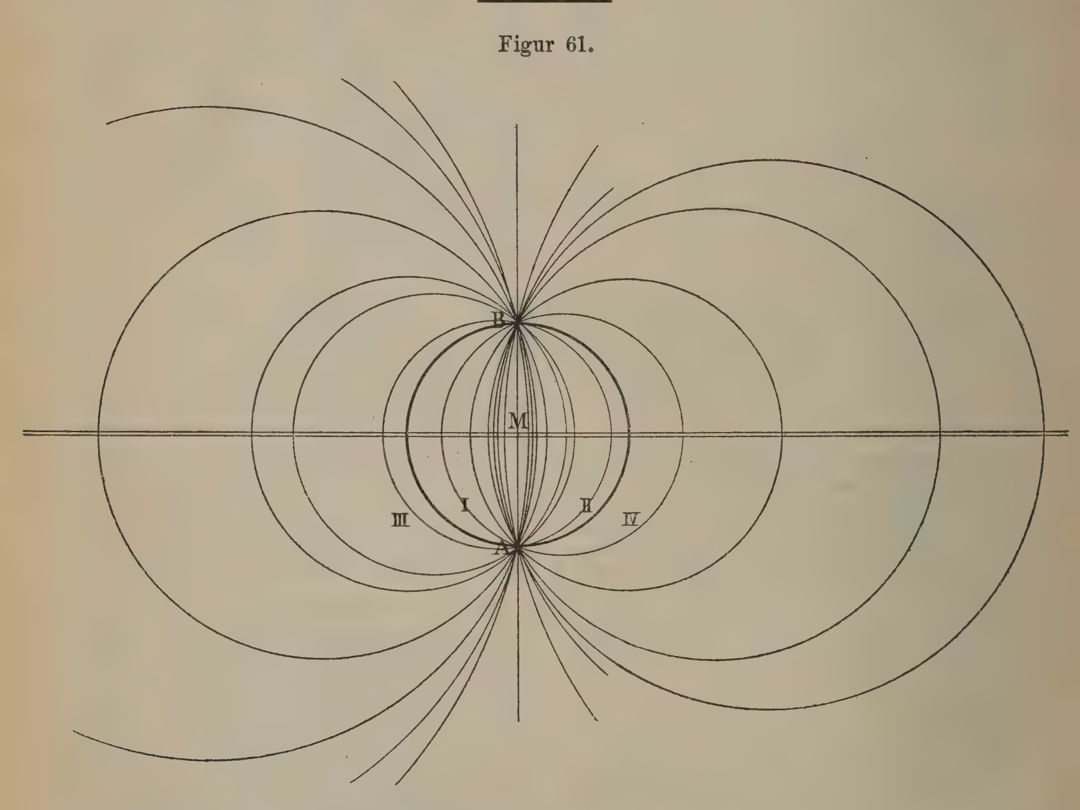
Erkl. 247. In Figur 56 hat Punkt P gleiche Potenz nicht nur in Bezug auf die Kreise M_1 und M_2, sondern wegen der gleichen Tangentenabschnitte auch für die sämtlichen Kreise X_{aa} u. s. w., also ist dort P Potenzpunkt für sämtliche sechs Kreise der ganzen Figur. Und deshalb gehen durch P nicht nur die in der Figur gezeichnet vorliegenden Potenzlinien der Kreispaare $M_1 M_2$ (PC), sondern auch, abgesehen von den Tangenten der Berührungskreise, die Potenzlinien der Kreispaare $X_{aa} X_{ee}$ und $X_{ae} X_{ea}$. Erstere aber geht durch S_a, letztere durch S_i; denn die Potenz des Punktes S_a in Bezug auf Kreis X_{aa} ist $S_a V_1 \cdot S_a V_2$, die in Bezug auf Kreis X_{ee} ist $S_a T_1 \cdot S_a T_2$. Nach Satz 8 ist aber beides gleichgross. Ebenso ist nach demselben Satze die Potenz des Punktes S_i in Bezug auf die Kreise X_{ae} und X_{ea} bezüglich:

$$S_i V_1 \cdot S_i T_2 = S_i T_1 \cdot S_i V_2.$$

Also sind PS_a bezw. PS_i die Potenzlinien des ineinanderliegenden Kreispaares $X_{aa} X_{ee}$ bezw. des schneidenden Kreispaares $X_{ae} X_{ea}$.

Erkl. 248. Zieht man um S_a oder S_i je einen Kreis, dessen Radius im Quadrat gleich dieser „gemeinschaftlichen Potenz“ ist, so ist jener um S_a Orthogonalkreis für sämtliche gleichartigen (X_{aa} und X_{ee}) Berührungskreise der Kreise M_1 und M_2, jener um S_i wird von allen ungleichartigen (X_{ae} und X_{ea}) Berührungskreisen der Kreise $M_1 M_2$ unterm Halbmesser geschnitten: man nennt dieselben Potenzkreise (vergl. die Aufgaben 131 bis 134 am Schlusse dieses Teiles).

Figur 61.

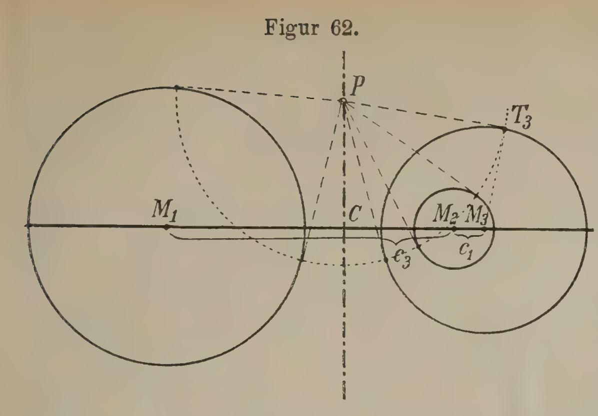


Frage 78. Welcher besondere Einzelfall des Satzes 15 führt zu bemerkenswerten Ergebnissen?

Erkl. 249. Als Beispiel dreier Kreise auf derselben Centralen mit einzigem unendlich fernem Potenzmittelpunkt mögen jene in Fig. 38 oder 40 nachgesehen werden. Je zwei derselben geben als Potenzgerade ihre gemeinsame Sehne; die beiden andern liefern je eine zweite und dritte Gerade als Potenzlinie, die jeweils ganz ausserhalb des Kreises M_1 verläuft. Daher gibt es keinen im Endlichen gelegenen Punkt, von dem aus gleichlange Tangenten an diese drei Kreise gehen. Würde man vom unendlich fernen Potenzpunkte Tangenten an die Kreise ziehen, so erhielte man in den Durchmesserendpunkten

Antwort. 1) Ein Einzelfall des Satzes 15 entsteht dadurch, dass die Mittelpunkte der drei betrachteten Kreise auf eine und dieselbe Gerade verlegt werden. Wenn dann die drei Kreise alle einander ausschliessen, so entsteht bei jeder paarweisen Gruppierung eine andere Potenzgerade, aber stets senkrecht zur gemeinsamen Centralen. Daher sind diese drei Potenzgeraden parallel, und ihr Schnittpunkt liegt unendlich fern: die drei Kreise haben einen unendlich fernen Potenzmittelpunkt und die

Figur 62.



AB die zu einander parallelen und auf der Centralen senkrechten Tangenten. Und es gibt keinen Orthogonalkreis, wenn man nicht die Centrale selbst als Kreis mit jenem unendlich fernen Mittelpunkte dafür ansehen will.

Erkl. 250. Findet sich — entgegengesetzt der vorigen Ueberlegung — irgend ein Punkt P im Endlichen, der gleiche Potenz hat für die zwei Kreispaare $M_1 M_2$ und $M_1 M_3$, so hat derselbe nach Satz 15 auch gleiche Potenz für das Kreispaar M_{23}; und nicht nur dieser Punkt P, sondern nach der Antwort 69 II auch jeder beliebige Punkt Q der von P auf die Centrale gefällten Senkrechten hat dieselbe Potenz für die Kreispaare $M_1 M_2$ und $M_1 M_3$, also auch $M_2 M_3$.

Erkl. 251. In Satz 14 war ausgesprochen, dass für zwei Kreise die Potenzlinie senkrecht steht in dem Punkte C der Centrale, für welchen:

$$M_1 C = \frac{c^2 + r_1^2 - r_2^2}{2c}.$$

Sollen also zwei Kreispaare M_{12} und M_{13} gleiche Potenzlinie haben, so muss $M_1 C$ für beide denselben Wert haben, ob nun in dem Ausdruck für $M_1 C$ $r_1 r_2 c_3$ oder $r_1 r_3 c_2$ eingesetzt worden. Daraus entsteht nebenstehende Gleichung, deren Ergebnis leicht zu merken ist durch die Beobachtung, dass der einzige negative Ausdruck $r_2^2 c_2$ gerade der ist, welcher die grösste Centralstrecke $c_2 = M_1 M_3$ enthält. Ebenso unterscheiden sich die Ausdrücke $M_1 C$, $M_2 C$, $M_3 C$ stets nur durch die Wahl der zugehörigen Centralstrecke, sowie dadurch, dass der zum in Betracht gezogenen Kreismittelpunkte zugehörige Radius positiv in die Formel eintritt.

Erkl. 252. In der Figur 61 und 63 ist es ohne weitere Umwege erkennbar, dass wenn P irgend ein Punkt der gemeinsamen Sehne oder der gemeinsamen Tangente ist, dann $PA \cdot PB$ für alle Kreise der Figur 61, bezw. $\overline{PM}^2$ für alle Kreise der Figur 63 die gleichgrosse gemeinsame Potenz darstellt. Nicht so einfach ist dies für die Kreise der Figur 62, wofür dann eben die nebenstehende Betrachtung ein-

gleichlangen Tangenten von diesem sind die parallelen Tangenten in den Schnittpunkten der Centralen; die Centrale selbst ist der Orthogonalkreis, nämlich ein Kreis mit unendlich grossem Radius.

2) Wenn jedoch die drei Kreise mit gemeinsamer Centralen einander nicht alle ausschliessen, so ist auch der Fall möglich, dass die Potenzgerade des ersten Paares mit jener des zweiten und folglich auch mit der des dritten Paares ganz zusammenfällt. In erster Reihe tritt dies ein, wenn die drei Kreise eine gemeinsame Sehne oder Tangente haben, wenn also alle drei Kreise durch dieselben zwei (getrennten oder zusammenfallenden) Punkte gehen. Aber auch sonst ist es möglich, dass die Potenzlinie zweier Kreispaare $M_1 M_2$ und $M_1 M_3$ die gleiche ist. Bezeichnet man zur Untersuchung dieses Falles die Centralen $M_1 M_2$, $M_2 M_3$ und $M_1 M_3$ der Abkürzung wegen mit c_3, c_1 und c_2, und setzt die Bedingung an, dass der Fusspunkt C der Potenzlinie für das Paar $M_1 M_2$ denselben Abstand von M_1 habe, wie für das Paar $M_1 M_3$, so erhält man unter der Festsetzung $r_1 > r_3 > r_2$ die folgende Gleichung (vergl. Satz 14):

$$M_1 C = \frac{c_3^2 + r_1^2 - r_2^2}{2 c_3} = \frac{c_2^2 + r_1^2 - r_3^2}{2 c_2}.$$

Hieraus folgt aber:

$$(c_3^2 + r_1^2 - r_2^2) c_2 = (c_2^2 + r_1^2 - r_3^2) c_3,$$
$$c_3^2 c_2 + r_1^2 c_2 - r_2^2 c_2 = c_2^2 c_3 + r_1^2 c_3 - r_3^2 c_3,$$
$$r_1^2 (c_2 - c_3) + r_3^2 c_3 - r_2^2 c_2 = c_2 c_3 (c_2 - c_3).$$

Da nun:

$$M_1 M_3 = c_2 = M_1 M_2 + M_2 M_3 = c_3 + c_1,$$

so ist:

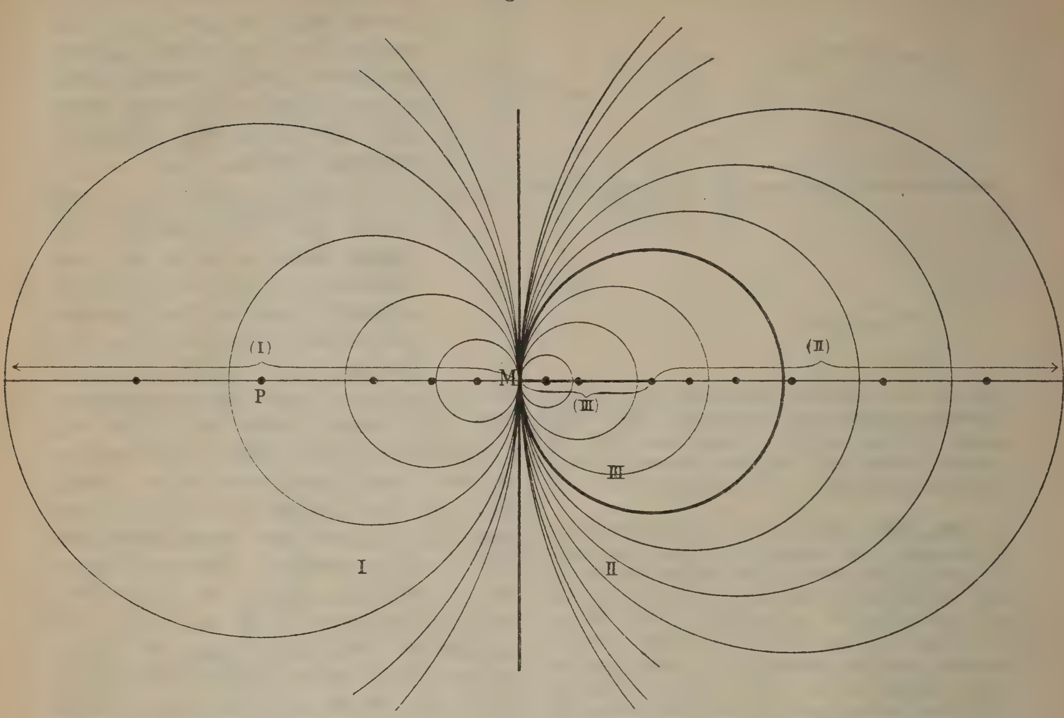
$$c_2 - c_3 = c_1,$$

also:

$$r_1^2 \cdot c_1 + r_3^2 c_3 - r_2^2 c_2 = c_1 c_2 c_3.$$

Unter dieser Bedingung also haben drei Kreise mit gemeinsamer Centralen eine gemeinsame Potenzgerade, und zwar ist dieselbe eine Senkrechte auf der Centralen, deren Abstand von M_1 gleich ist:

Figur 63.



tritt. Der Orthogonalkreis um P in Figur 62 trifft alle drei Kreise rechtwinklig; in Fig. 63 ist M der Punkt, durch welchen alle Orthogonalkreise hindurchgehen müssen, und in Figur 62 gibt es Orthogonalkreise für die Punkte ausserhalb AB als Mittelpunkte, dagegen für die Punkte innerhalb AB als Mittelpunkte entstehen Kreise, die unterm Durchmesser geschnitten werden, und zwar durch jeden dem Büschel angehörigen Kreis.

$$\frac{c_3^2 + r_1^2 - r_2^2}{2c_3} = \frac{c_2^2 + r_1^2 - r_3^2}{2c_2},$$

von M_2 aber gleich:

$$\frac{c_3^2 - r_1^2 + r_2^2}{2c_3} = \frac{c_1^2 + r_2^2 - r_3^2}{2c_1},$$

von M_3 gleich:

$$\frac{c_2^2 - r_1^2 + r_3^2}{2c_2} = \frac{c_1^2 - r_2^2 + r_3^2}{2c_1}.$$

Analog der Bezeichnungsweise der obengenannten Gruppe von Kreisen als „Kreisbüschel“ sagt man auch von diesen Kreisen, sie bilden ein Kreisbüschel. Und wie obige Kreise (siehe Figur 61 und 63) die zwei getrennten Punkte AB bezw. den Doppelpunkt gemeinsam haben, so sagt man, dass auch die Kreise eines solchen Kreisbüschels zwei „imaginäre“ Punkte gemeinsam haben.

Frage 79. Durch wieviele Bestimmungsstücke ist ein Kreisbüschel und jeder der ihm zugehörigen Kreise eindeutig festgelegt?

Antwort. 1) Hat das Kreisbüschel zwei gemeinsame reelle Punkte, wie in Figur 61, so ist das gesamte

Erkl. 253. Der Unterschied zwischen reell und imaginär ist aus der rein geometrischen Auffassung nicht hervorgegangen. Man gelangt dazu durch die rechnende Behandlung geometrischer Aufgaben. Sucht man nämlich durch Rechnung etwa den Abstand der Schnittpunkte zweier Kreise von ihren Mittelpunkten, so erhält man reelle Zahlenwerte, wenn:

$$r_1 + r_2 > c > r_1 - r_2,$$

dagegen imaginäre Zahlenwerte, wenn:

$$r_1 + r_2 < c \text{ oder } c < r_1 - r_2.$$

Darnach spricht man dann überhaupt von den Schnittpunkten nicht schneidender Kreise als imaginären Punkten.

Imaginäre Elemente werden in der höheren Geometrie nicht selten in die Betrachtung eingeführt.

Erkl. 254. Ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises gegeben, so kennt man in der Formel:

$$r_1^2 c_1 + r_3^2 c_3 - r_2^2 c_2 = c_1 c_2 c_3$$

die Stücke $c_1 c_2 c_3$, man erhält für r_3 eine rein quadratische Gleichung, also eine einzige positive Strecke. In jedem der drei Fälle erhält man auch nebenstehend nur einen Kreis mit gegebenem Mittelpunkt. Ist aber der Radius gegeben, so entstehen jedesmal zwei verschiedene Kreise, symmetrisch zur Potenzlinie. Auch obige Formel enthält, wenn der Mittelpunkt M_3 unbekannt, die zwei Unbekannten c_1 und c_2, und da:

$$c_2 = c_1 + c_3,$$

so entsteht eine Gleichung für c_1 von der Form:

$$r_1^2 c_1 + r_3^2 c_3 - r_2^2 (c_1 + c_3) = c_1 c_3 (c_1 + c_3).$$

Dies ist aber eine gemischt quadratische Gleichung, liefert also zweierlei Werte für:

$$c_1 = M_2 M_3.$$

Man kann demnach mit gegebenem Mittelpunkt nur immer einen Kreis des Büschels finden; dagegen kann ein Kreis von gegebenem Radius an zwei verschiedenen Stellen einem Büschel eingefügt werden: symmetrisch zur Potenzlinie.

Erkl. 255. Sind im letzten Falle nebenstehender Antwort zwei Orthogonalkreise gegeben, so schneiden sich die Ortskreise für beide auf der gemeinsamen Sehne der Orthogonalkreise. Denn von jenem Schnittpunkte gehen an den ersten und an den zweiten Ortskreis Tangenten von der Länge r_3. Folglich hat dieser Schnittpunkt gleiche Potenz für beide Orthogonalkreise. Dies gilt aber nur von den Punkten auf deren gemeinsamer Sehne, folglich liegen die Schnittpunkte auf derselben.

Kreisbüschel eindeutig festgelegt entweder durch Wahl der zwei festen Punkte AB selbst, oder durch die Achse und einen der festen Punkte, oder durch zwei beliebig gegebene Kreise des Büschels; auch durch einen der Orthogonalkreise und die Achse.

Zur Konstruktion weiterer Kreise dieses Büschels kann entweder der Mittelpunkt M gegeben sein, und dann ist MA dessen Radius; oder es kann der Radius r gegeben sein, und dann ist der Mittelpunkt durch den Kreis um A zu finden als einer der beiden Punkte der Achse, welcher von A den Abstand r hat.

2) Hat das Kreisbüschel zwei zusammenfallende gemeinsame Punkte, wie in Figur 63, so ist das Kreisbüschel eindeutig festgelegt durch die Wahl des festen Punktes und der Achse, oder durch den festen Punkt und einen der Kreise, oder durch zwei beliebige Kreise des Büschels; auch durch einen Orthogonalkreis und die Achse, oder durch zwei Orthogonalkreise.

Zur Konstruktion weiterer Kreise des Büschels kann entweder deren Mittelpunkt gewählt werden, oder es ist der Radius gegeben, und dann gibt es wieder zwei zugehörige Kreise.

3) Hat das Büschel zwei imaginäre gemeinsame Punkte, wie in Fig. 62, so ist es festzulegen durch zwei seiner Kreise, oder durch einen Orthogonalkreis und die Achse, oder durch zwei Orthogonalkreise. Die andern Bestimmungsarten der ersten und zweiten Gruppe fallen weg.

Ist zur Konstruktion eines weiteren Kreises der Mittelpunkt, etwa M_3, gegeben, so benutzt man am besten den Orthogonalkreis Figur 62, um durch die von M_3 an denselben gelegte Tangente den Radius $M_3 T_3$ zu finden. Ist dagegen der Radius r_3 gegeben, so gibt es zum Orthogonalkreis P einen koncentrischen Kreis als Ort des Punktes, von welchem an diesen Kreis P Tangenten von gegebener Länge r_3 gehen. Wo dieser Kreis die Achse trifft, liegt der Mittel-

punkt M_3 des gesuchten Kreises. Letztere Konstruktion gilt auch, wenn zwei Orthogonalkreise gegeben sind: die Schnittpunkte der Ortskreise sind die gesuchten Mittelpunkte M_3.

Frage 80. In welcher Beziehung zu einander stehen die Orthogonalkreise eines Kreisbüschels?

Erkl. 256. Für den ersten Fall der nebenstehenden Antwort dürfte eine Figur entbehrlich sein, da Figur 63 genügt, um beide Büschel zur Anschauung zu bringen. Die zwei Geraden durch M sind beziehungsweise Achse des einen und Tangente des andern Büschels. Dreht man das Buch mit der Figur zur querliegenden Stellung, so hat man das Bild des zweiten Büschels.

Erkl. 257. In Figur 64 sind durch 11, 12, 13 bezw. 21, 22, 23 und 31, 32, 33 die Punkte bezeichnet, wo der Kreis P_1 bezw. P_2 oder P_3 geschnitten wird von den Kreisen $M_1 M_2 M_3$. Zieht man also nach einem solchen Punkte T die Verbindungslinie mit den zugehörigen Kreismittelpunkten P und M, so steht $PT \perp MT$, und PT ist Radius des Kreises P, Tangente des Kreises M; dagegen MT Radius des Kreises M, Tangente des Kreises P. Die Berührungspunkte der von einem Punkte P an die Kreise $M_1 M_2 \cdots$ gezogenen Tangenten sind gleich weit von P entfernt, weil sie auf dem Kreise um P liegen, und die Berührungspunkte der von einem Punkte M an die Kreise $P_1 P_2 \cdots$ gezogenen Tangenten sind gleich weit von M entfernt, weil sie auf einem Kreise um M liegen. Daher hat nicht nur j e d e r P u n k t der Geraden $P_1 P_2 \cdots$ gleiche Potenz für alle Kreise M, sondern auch jeder Punkt der Geraden $M_1 M_2 \cdots$ gleiche Potenz für alle Kreise P.

Erkl. 258. Unter Benutzung der in Antwort 69 und 70 aufgestellten Formeln lässt sich auch rechnungsmässig nachweisen, dass wenn das eine Kreisbüschel von der ersten Art ist, dann das andere von der dritten sein muss, und umgekehrt. Es ist nämlich irgend eine Strecke MP in Figur 64 sowohl Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks MCP als des Dreiecks MTP, also:

$$\overline{MP}^2 = \overline{MC}^2 + \overline{CP}^2 = \overline{MT}^2 + \overline{TP}^2.$$

Demnach ist:

$$\overline{MC}^2 - \overline{MT}^2 = \overline{PT}^2 - \overline{PC}^2$$

oder:

$$(MC + MT)(MC - MT) = (PT + PC)(PT - PC).$$

Da nun die Grössen $MC + MT$ und $PT + PC$ jedenfalls beiderseits positiv sind, so müssen die Differenzen:

Antwort. 1) Für ein Kreisbüschel der z w e i t e n A r t, also mit g e m e i n s a m e r T a n g e n t e, wie in Figur 63, erkennt man unmittelbar, dass sämtliche Orthogonalkreise ein mit dem ersten k o n g r u e n t e s K r e i s b ü s c h e l bilden, nur mit einer Drehung um 90^0. Denn durch Punkt M müssen alle diese Orthogonalkreise gehen, und ihre Mittelpunkte liegen auf der Senkrechten in M, also hat man lauter Kreise, welche im Punkte M die Achse berühren.

2) Für ein Kreisbüschel der e r s t e n Art, also mit g e m e i n s a m e r S e h n e, wie in Figur 61, seien $P_1 P_2 P_3$ drei auf der Potenzlinie gelegene Mittelpunkte für Orthogonalkreise. Dann sind jedenfalls auch z. B. die Kreise $M_1 M_2 M_3$ Orthogonalkreise dieser Kreise $P_1 P_2 P_3$, also $M_1 M_2 M_3$ g e m e i n s a m e P o t e n z l i n i e der Kreise $P_1 P_2 P_3$. Folglich sind auch die Kreise $P_1 P_2$ u. s. w. Kreise eines B ü s c h e l s mit Potenzlinie $M_1 M_2 \cdots$

Man kann dies auch beweisen durch die Formeln für die Strecken $P_1 C$ und r_1, $P_2 C_2$ und r_2 u. s. w. Da nämlich die Kreise $P_1 P_2 P_3$ von einem beliebigen der Kreise auf der Centralen MC rechtwinklig geschnitten werden, so folgt, genau wie in Antwort der Frage 69 für die Punkte der Achse MM so jetzt für die Punkte der Geraden PP die Formel:

$$\overline{P_1 M}^2 - \overline{P_2 M}^2 = r_1^2 - r_2^2 = \overline{P_1 C}^2 - \overline{P_2 C}^2,$$

also:

$$(P_1 C + P_2 C)(P_1 C - P_2 C) = r_1^2 - r_2^2$$

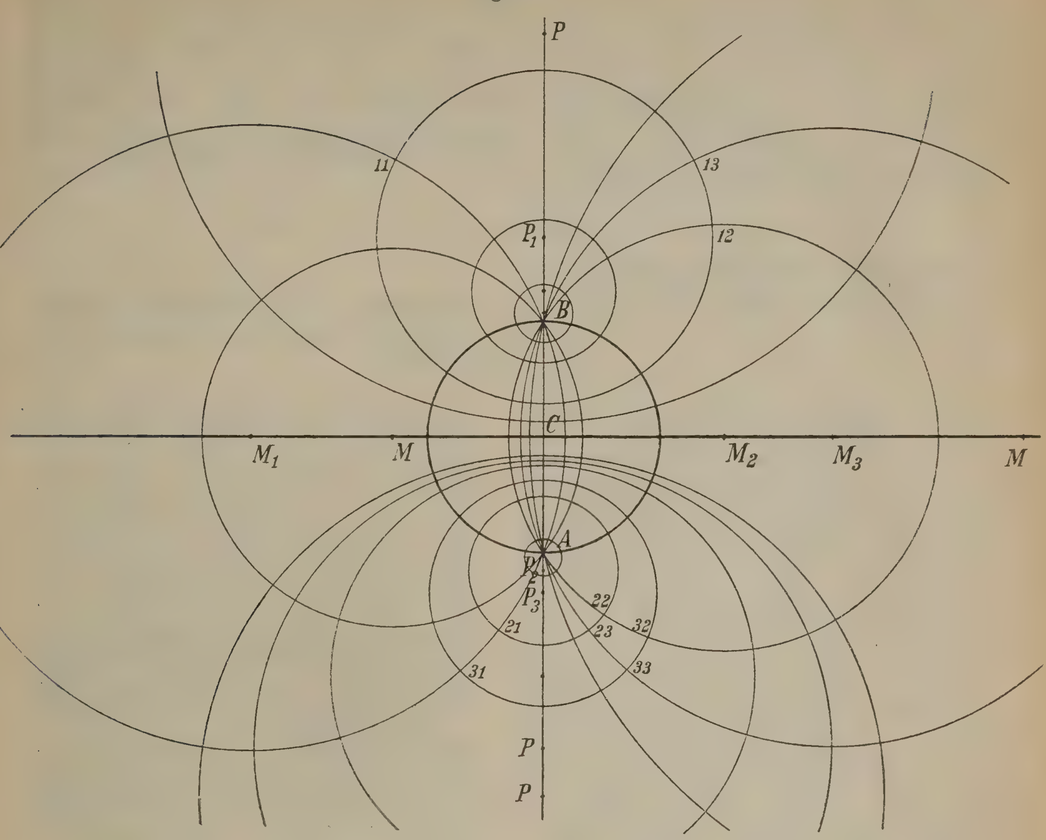
und ebenso für P_1 und P_3:

$$(P_1 C + P_3 C)(P_1 C - P_3 C) = r_1^2 - r_3^2.$$

Hierin kann man nach Figur 64 ersetzen:

$$P_1 C + P_2 C = P_1 P_2 = p_3,$$
$$P_1 C + P_3 C = P_1 P_3 = p_2,$$
$$P_3 C - P_2 C = P_3 P_2 = p_1 = p_2 - p_3,$$

Figur 64.



und
$$MC - MT = MC - r_m$$
$$PT - PC = r_p - PC$$
beiderseits gleichzeitig positiv oder gleichzeitig negativ sein; d. h. wenn $MC \gtrless r_m$, so muss $PC \lessgtr r_p$ sein. Das erstere ist aber die Bedingung dafür, dass Punkt C ausserhalb oder innerhalb des Kreises M liegt, das letztere dafür, dass derselbe Punkt C innerhalb oder ausserhalb des Kreises P liegt. Da aber C Fusspunkt der Senkrechten vom Kreismittelpunkt ist, so gilt für die ganze Gerade CM bezw. CP, dass gleichzeitig die Gerade CM ausserhalb der Kreise P liegt und die Gerade CP die Kreise M schneidet, oder gleichzeitig CP ausserhalb der Kreise M liegt und die Gerade CM die Kreise P schneidet. Das ist aber eben der Ausdruck dafür, dass die Kreisbüschel M und P von verschiedener Art sein müssen.

Erkl. 259. Legt man in irgend einem Punkte eines Orthogonalkreises eine Tangente an und bringt sie zum Schnitt mit der Achse des gegebenen Büschels, so erhält man den Radius und Mittelpunkt eines Büschelkreises.

und man erhält:
$$p_3(P_1C - P_2C) = r_1^2 - r_2^2,$$
$$p_2(P_1C - P_3C) = r_1^2 - r_3^2.$$

Erweitert man die erste Gleichung mit p_2, die zweite mit p_3, so entsteht durch Subtraktion:
$$p_2p_3(P_1C - P_2C - P_1C + P_3C) = (r_1^2 - r_2^2)p_2 - (r_1^2 - r_3^2)p_3,$$
oder:
$$p_2p_3(P_3C - P_2C) = r_1^2(p_2 - p_3) + r_3^2p_3 - r_2^2p_2,$$
$$p_2p_3 \cdot p_1 = r_1^2 \cdot p_1 + r_3^2p_3 - r_2^2p^2.$$

Dies ist aber auch in Buchstabengrössen die in Antwort der Frage 78 gefundene Bedingung dafür, dass die Kreise $P_1P_2P_3\cdots$ einem Kreisbüschel der dritten Art angehören.

3) Für ein Kreisbüschel der dritten Art (P_1P_2 u. s. w. in Figur 64) sind umgekehrt die Kreise des andern Büschels $M_1M_2\cdots$ Orthogonalkreise, also die Ge-

Thut man dies im Punkte A eines der zum Kreisbüschel P zugehörigen Orthogonalkreise M, so ist dieser Mittelpunkt selbst A, und die Tangente hat die Länge Null. Folglich ist A als Punkt selbst ein Kreis mit verschwindendem Radius, welcher als einer der Büschelkreise P anzusehen ist. Daraus geht wieder umgekehrt hervor, dass alle Orthogonalkreise M durch A und B gehen müssen, da sie sonst diesen kleinsten der Büschelkreise P nicht treffen könnten.

rade $M_1 M_2 \cdots$ Potenzlinie. Wenn nun einer dieser letzteren Kreise durch die Punkte A und B der Achse $P_1 P_2$ geht, so müssen alle Kreise $M_1 \cdots$ durch dieselben Punkte AB gehen, denn AB ist ja Potenzlinie für alle Kreise M, muss also hier gemeinsame Sehne sein.

Frage 81. Welches Ergebnis liefert die vorige Ueberlegung?

Antwort. Als Ergebnis voriger Ueberlegung kann man folgenden Satz aussprechen:

Satz 16. Die Gesamtheit aller Kreise mit gemeinsamer Centralen und gemeinsamer Potenzlinie bildet ein Kreisbüschel, und zwar von erster, zweiter oder dritter Art, wenn die Kreise zwei getrennte reelle oder zwei zusammenfallende oder zwei imaginäre Punkte gemeinsam haben. Die Gesamtheit der Orthogonalkreise jedes Büschels bildet wieder ein Kreisbüschel mit Vertauschung der vorigen Centralen und Potenzlinie, und zwar von erster, zweiter oder dritter Art, wenn das erste Kreisbüschel ein solches von dritter, zweiter oder erster Art ist.

Satz 16a. Durch zwei beliebige Kreise werden stets zwei Kreisbüschel bestimmt, nämlich eines, dem diese Kreise selbst angehören, und ein zweites, gebildet von ihren Orthogonalkreisen.

Erkl. 260. Durch die Fläche des Kreises, welcher die Strecke AB der Figur 64 zum Durchmesser hat, muss jeder der zweimal unendlich vielen Büschelkreise hindurchgehen. Daher drängen sich im Innern dieses Kreises die Linien am engsten zusammen. Dieser Kreis selbst ist der kleinste von allen des Kreisbüschels M. Die Gerade AB selbst ist als der grösste Kreis des Büschels M mit unendlich grossem Radius anzusehen. Für das Büschel P sind die Punkte A und B als Kreise mit Radius Null die kleinsten Kreise; die Gerade CM selbst ist als der grösste Kreis des Büschels P mit unendlich grossem Radius anzusehen. In der That schneidet AB alle Kreise P als Durchmesser, bildet also rechte Winkel mit all diesen Kreisen, wie auch mit der Geraden CM, und ebenso schneidet die Gerade CM alle Kreise M als Durchmesser, bildet also rechte Winkel mit all diesen Kreisen, wie auch mit der Geraden AB.

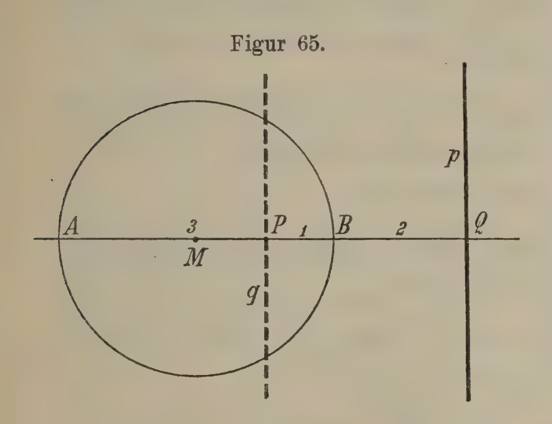
Erkl. 261. Die Figur 64 findet eine äusserst wichtige Anwendung in der Kartographie. Projiciert man nämlich die Erdoberfläche von einem beliebigen ihrer Punkte auf die im andern Endpunkte des Durchmessers gelegte Tangentenebene (sog. Centralprojektion auf die Antipodenebene), so werden sämtliche Meridiankreise der Kugel zum Kreisbüschel durch die projicierten Polpunkte, sämtliche Parallelkreise zum Kreisbüschel der Orthogonalkreise. Und bei unendlich enger Aufeinanderfolge dieser Kreise in Fig. 64 wird die ganze Ebene in kleinste Quadrate eingeteilt, wie dies auch durch die Meridian- und Parallelkreise auf der Kugeloberfläche geschieht. Demnach wird die Abbildung eine sog. isogonale (gleichwinklige), d. h. die kleinsten Figurenteile in Original und Bild sind ähnliche Figuren.

6) Ueber einige besonderen Beziehungen und Probleme am Kreise.

a) Ueber Pol und Polare.

Frage 82. Was versteht man unter Pol und Polare?

Figur 65.



Erkl. 262. In Figur 65 ist die Durchmesserstrecke AB innen durch P, aussen durch Q geteilt im Verhältnis:

$$\frac{PA}{PB} = \frac{3}{1} = \frac{QA}{QB} = \frac{6}{2};$$

denn P ist gewählt als Mittelpunkt der Strecke MB, und $QB = MB = r$. Also sind die Endpunkte des Durchmessers AB mit PQ vier harmonische Punkte, und folglich ist die Senkrechte p Polare zu P, P Pol zu p und ebenso die Senkrechte q Polare zu Q, Q Pol zu q.

Antwort. Wenn man einen beliebigen Durchmesser AB eines Kreises durch zwei Teilpunkte P und Q innen und aussen im gleichen Verhältnis (harmonisch) teilt, und im einen dieser Teilpunkte Q auf dem Durchmesser die Senkrechte p errichtet, so heisst diese Senkrechte im einen Teilpunkte Q die Polare des andern Teilpunktes P, und umgekehrt jener Teilpunkt P der Pol dieser Geraden p. (Vergl. auch im VI. Teile dieses Lehrbuches die Antworten der Fragen 69 bis 71 und die Aufgaben 274 und 275.)

Frage 83. Wie konstruiert man die Polare zu einem gegebenen Pol und den Pol zu einer gegebenen Polaren?

Erkl. 263. Neben der Konstruktion der Senkrechten kommt bei der Konstruktion von Pol und Polare nur noch die Aufsuchung des vierten harmonischen Punktes in Betracht. Jede Konstruktionsweise des vierten harmonischen Punktes, wie deren im VI. Teile dieses Lehrbuches eine grosse Anzahl zu finden war, liefert also auch eine Konstruktionsweise für Pol und Polare.

Erkl. 264. Am bemerkenswertesten ist unter diesen Konstruktionen des vierten harmonischen Punktes jene, welche bloss mit dem Lineal auszuführen war. Man darf daher auch die Konstruktion von Pol und Polare als eine bloss mit Lineal ausführbare bezeichnen.

Antwort. 1) Ist der Punkt P gegeben, so zieht man durch P den Durchmesser PM, sucht den vierten harmonischen Punkt Q zu ABP und errichtet die Senkrechte in Q als Polare zum Punkt P als Pol.

2) Ist die Gerade p gegeben, so zieht man senkrecht zu p den Durchmesser MQ und sucht den vierten harmonischen Punkt P zu ABQ als Pol zur Geraden p als Polare.

Frage 84. Was folgt aus den beiden vorigen Antworten für die gegenseitige Lage von Pol und Polare?

Antwort. Da von allen Punkten der Polaren der Schnittpunkt mit dem Durchmesser als Fusspunkt der Senkrechten am nächsten beim Pole liegt, und da von zwei zugeordneten harmonischen Punkten der eine stets innerhalb, der andere ausserhalb der geteilten Strecke liegt, so folgt aus vorigen Antworten:

1) Liegt der Pol innerhalb des Kreises, so liegt die Polare ganz ausserhalb des Kreises;

und umgekehrt:

Liegt die Polare ganz ausserhalb des Kreises, so liegt der Pol innerhalb des Kreises.

2) Liegt der Pol ausserhalb des Kreises, so muss die Polare den Kreis schneiden;

und umgekehrt:

Schneidet die Polare den Kreis, so liegt der Pol ausserhalb des Kreises.

3) Liegt der Pol auf dem Kreise, so ist die Polare Tangente in diesem Punkte;

und umgekehrt:

Berührt die Polare den Kreis, so ist ihr Berührungspunkt ihr Pol.

4) Liegt insbesondere der Pol im Mittelpunkte des Kreises, so liegt die Polare unendlich fern.

5) Geht die Polare durch den Mittelpunkt des Kreises, so liegt ihr Pol unendlich fern.

Erkl. 265. Die Theorie von Pol und Polare bildet ein wichtiges Kapitel nicht nur bei der Lehre vom Kreis, sondern besonders bei der Lehre von den Kegelschnitten. Während der Inhalt der beiden vorigen Antworten sich auf den Kreis beschränkt, so hat die nebenstehende Antwort für alle Kurven zweiter Ordnung Giltigkeit. Insbesondere führen die beiden letzten Fälle gerade bei der rein geometrischen Betrachtungsweise der Kegelschnitte zur Einführung der Lehre vom Mittelpunkt und Durchmesser.

Erkl. 266. Der dritte Fall nebenstehender Antwort folgt aus der Thatsache, dass wenn von vier harmonischen Punkten einer in einen Grenzpunkt der zu teilenden Strecke, dann der andere in denselben Punkt fällt. Denn nach Antwort 13 und Figur 3 des VI. Teiles dieses Lehrbuches fallen im Anfangspunkte der Strecke die Werte ± 0, im Endpunkte die Werte $\pm \infty$ des Teilungsverhältnisses zusammen.

Erkl. 267. Ebenfalls nach Antwort 13 und Figur 3 des VI. Teiles dieses Lehrbuches hat man im Mittelpunkt der Strecke AB für das Teilungsverhältnis den Wert $+1$, im unendlich fernen Punkte den Wert -1, und hieraus folgt die Richtigkeit der beiden letzten Fälle nebenstehender Antwort. — Die Umkehrungen derselben, welche hier weniger in Betracht kommen, würden heissen:

4) Liegt die Polare unendlich fern, so ist der Pol Mittelpunkt des Kreises.

5) Liegt der Pol unendlich fern, so geht die Polare durch den Kreismittelpunkt.

Erkl. 268. Man kann die letzten drei Fälle nebenstehender Antwort in Sätzen formulieren wie folgt:

a) Die Polare zu einem Kurvenpunkte ist seine Tangente — der Pol einer Tangente ist ihr Berührungspunkt.

b) Polare des Kreismittelpunktes ist die unendlich ferne Gerade — Pol der unendlich fernen Geraden ist der Kreismittelpunkt.

c) Der Pol eines Durchmessers liegt unendlich fern — Polare eines unendlich fernen Punktes ist ein Durchmesser.

Frage 85. Welche Masseigenschaft folgt für Pol und Polare aus den Beziehungen der harmonischen Punkte PQ zum Mittelpunkte M?

Antwort. Da nach Satz 5 des VI. Teiles dieses Lehrbuches:

$$MP \cdot MQ = MA^2 = MB^2,$$

so kann man die Definition von Pol und Polare in Antwort der Frage 82 auch so aussprechen (siehe Figur 65):

Erkl. 269. Zwei Punkte P, Q nach nebenstehender Definition nennt man auch konju-

gierte inverse Punkte oder auch reciproke Polpunkte des Kreises (vergl. die folgenden Abschnitte dieses Kapitels).

Erkl. 270. Aus der Definition $MP \cdot MQ = r^2$ folgt:

$$MQ = \frac{r^2}{MP},$$

und daraus folgen wieder alle Einzelfälle voriger Antwort, nämlich:

1) wenn $MP < r$, muss $MQ > r$, damit $MP \cdot MQ = r^2$,

2) $MP > r$ verlangt $MQ < r$,

3) $MP = r$ verlangt auch $MQ = r$,

4) $MP = 0$ liefert $MQ = \infty$ und umgekehrt $MP = \infty$ gibt $MQ = 0$.

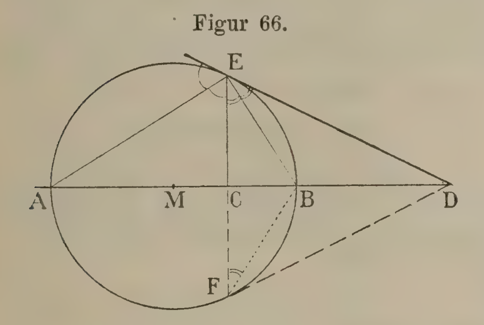
Wählt man auf einem beliebigen Radius MB eines Kreises zwei Punkte P und Q in solchen Abständen, dass:

$$MP \cdot MQ = r^2,$$

so ist je die Senkrechte im einen Punkte Polare des andern Punktes, und umgekehrt jeder Punkt der Pol der Senkrechten im andern Punkte.

Frage 86. Welche besondere Beziehung besteht zwischen einem äusseren Punkte und seiner Polaren?

Figur 66.



Erkl. 271. Im nebenstehenden wird DE unmittelbar als Tangente vorausgesetzt, und nachgewiesen, dass die Berührungssehne mit der Polaren zusammenfällt. Man kann aber auch umgekehrt durch Zuhilfenahme des Radius ME nachweisen, dass wenn CE Polare zu D ist, dann DE Tangente, d. h. $MED = 90^0$ sein muss. Sind nämlich $ABCD$ vier harmonische Punkte und E ein Punkt des Halbkreises über AB, so sind EA, EB, EC, ED vier harmonische Strahlen, von denen zwei senkrecht stehen; folglich müssen diese nach dem Satze in Antwort 36 des VI. Teiles dieses Lehrbuches die Winkelhalbierenden der beiden andern sein, also $BED = BEC$. Nun steht aber auf demselben Kreisbogen auch der Peripheriewinkel BAE, der im gleichschenkligen Dreieck MAE dem Winkel MEA gleich ist. Demnach ist $\sphericalangle MEA = BED$. Nimmt man also von dem rechten Winkel AEB auf der einen Seite das Stück MEA weg und setzt auf der andern Seite BED an, so muss wieder ein rechter Winkel bleiben, folglich $MED = 90^0$, d. h. ED Tangente.

Antwort. Zieht man von einem Punkte D die Tangenten DEX und DF an den Kreis, so werden wegen der gleichen Bogenstücke $BE = BF$ und $AE = AF$ auch die Peripheriewinkel:

$$BED = BEF$$

und

$$AEF = AEX;$$

folglich sind EB und EA die Halbierungslinien des Innen- und Aussenwinkels im Dreieck DEC; und daher sind nach dem Satze des Apollonius $ABCD$ vier harmonische Punkte, also EC die Polare zu D.

Man kann also den Aussagen in der Antwort der Frage 84 die folgenden beifügen:

Satz 17. Die Polare eines äusseren Punktes ist die Berührungssehne der von ihm an den Kreis gehenden Tangenten;

und umgekehrt:

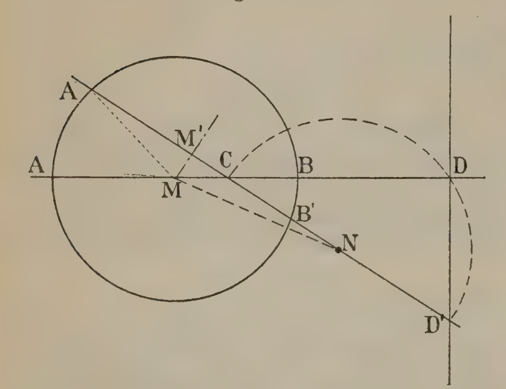
Satz 17a. Der Pol einer Sekante ist der Schnittpunkt der in ihren Kreisschnittpunkten errichteten Tangenten.

Diese Sätze gestatten die Konstruktion von Pol und Polare in erster Linie für äusseren Punkt und schneidende Gerade, aber auch für inneren Punkt und äussere Gerade, da ja die Polare für Punkt C die Senkrechte in D ist, und umgekehrt.

Frage 87. Welches ist die wichtigste Beziehung zwischen Pol und Polare?

Erkl. 272. Während der Inhalt des nebenstehenden Satzes für den Durchmesser durch den Punkt P die Definition von Pol und Polare liefert, hat derselbe auch Geltung für jede beliebige Sekante durch P. Der Durchmesser bleibt daher nur insofern ausgezeichnet, als er die einzige Gerade durch P ist, welche auf der Polaren p senkrecht steht: alle andern Geraden durch P werden von p unter schiefem Winkel getroffen.

Figur 67.



Erkl. 273. Der in Antwort 85 und in nebenstehender Ausführung mehrfach angewandte Satz 5 des VI. Teiles dieses Lehrbuches lautet: Das Produkt der Abstände zweier harmonischen Teilpunkte vom Mittelpunkte der geteilten Strecke ist gleich dem Quadrat der Hälfte dieser Strecke. Demnach ist in Figur 67 und 68:

$$MC \cdot MD = \overline{MA}^2 = \overline{MB}^2.$$

Umgekehrt wird infolge dieser Beziehung nachgewiesen, dass die Punkte $A'B'CD'$ in Figur 67 und $A'B'C'D$ in Figur 68 vier harmonische sind. Denn durch nebenstehendes erstes Beweisverfahren wird für beide Figuren durchgeführt, dass:

$$M'A'^2 = M'B'^2 = M'C \cdot M'D'$$

bezw.:

$$= M'C' \cdot M'D.$$

Und aus dieser Beziehung folgt beidemale die verlangte harmonische Beziehung der vier Teilpunkte.

Erkl. 274. Dass vier Punkte harmonisch sein müssen, wenn sie dem in voriger Erkl. 273 angezogenen Satze genügen, wird bewiesen durch Anwendung der Proportionsrechnung: Aus einer Gleichheit $a \cdot c = b^2$ folgt zunächst die Proportion:

$$a : b = b : c$$

Antwort. Die wichtigste Beziehung zwischen Pol und Polare ist ausgesprochen in dem Satze:

Satz 18. Auf jeder durch den Pol gehenden Sekante des Kreises werden durch Pol, Polare und Kreisperipherie vier harmonische Punkte erzeugt, so dass die Sehnenstrecke durch Pol und Polare harmonisch geteilt wird.

Beweis I (algebraisch)

a) für inneren Pol C und äussere Polare DD' (Figur 67).

Ist in Figur 67 DD' Polare des Punktes C und $A'CD'$ eine beliebige Sekante durch C, so lässt sich über der Strecke CD' als Durchmesser ein Halbkreis errichten, der durch D als den Scheitel des rechten Winkels geht, und dessen Radius:

$$\frac{1}{2} CD' = ND' = CN = DN = \varrho$$

ist. Fällt man auch von M die Senkrechte MM' auf CD', so ist zunächst nach dem „Sekantensatz" (Satz 1 dieses VIII. Teiles):

$$MC \cdot MD = \overline{MN}^2 - \varrho^2;$$

und ebenso:

$$\begin{aligned} M'C \cdot M'D' &= \overline{M'N}^2 - \varrho^2 \\ &= (\overline{MN}^2 - \overline{MM'}^2) - (\overline{MN}^2 - MC \cdot MD) \\ &= MC \cdot MD - \overline{MM'}^2 \\ &= \overline{MA'}^2 - \overline{MM'}^2 \\ &= \overline{M'A'}^2 = \overline{M'B'}^2. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Proportion:

$$M'A' : M'C = M'D' : M'A',$$

also durch korrespondierende Addition:

$$(M'A' + M'C) : (M'B' - M'C) = (M'D' + M'A') : (M'D' - M'B')$$

oder:

$$CA' : CB' = D'A' : D'B',$$

d. h. $A'B'CD'$ sind vier harmonische Punkte.

b) für äusseren Pol D und schneidende Polare CC' (Figur 68).

Ist in Figur 68 CC' Polare des äusseren Punktes D und $A'C'D$ eine beliebige

oder auch:

$$b : a = c : b.$$

Und aus einer Proportion:

$$a : b = c : d$$

folgt durch Addition bezw. Subtraktion des zweiten und ersten Glieds auf beiden Seiten die andere:

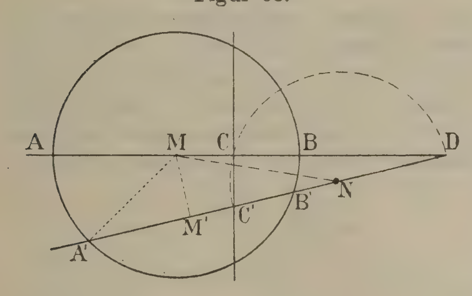
$$(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d).$$

Kann hierin die Grösse a bezw. d zweierlei Werte annehmen, wie im nebenstehenden:

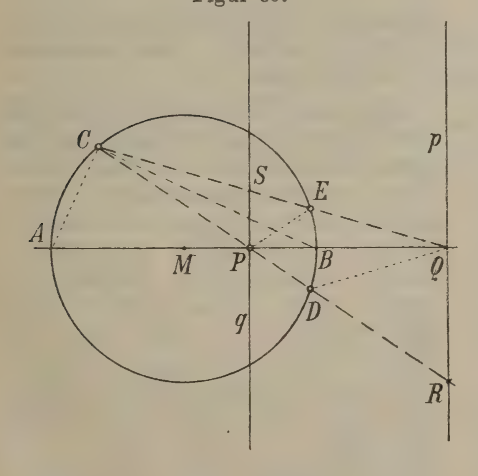
$$\overline{M'A'} = \overline{M'B'},$$

so darf auch in der Proportion an passender Stelle für a bezw. d bald $M'A'$, bald $M'B'$ eingesetzt werden.

Figur 68.



Figur 69.



Erkl. 275. Während Beweis I als Wiedergabe der Antworten 70, 71 des VI. Teiles dieses Lehrbuches eine mehr rechnende, also algebraische Durchführung aufweist, ist Beweis II mehr ein eigentlich geometrischer.

Beide Beweise sind nebenstehend doppelt geführt, der erste auch mit doppelter Figur, während beim zweiten die Elemente für beide Beweisfälle in derselben Figur eingezeichnet sind. Würde man sich diese Figur zweimal

Sekante durch D, so erhält man wieder über der Strecke $C'D$ als Durchmesser einen Halbkreis durch den Punkt C als den Scheitel des rechten Winkels und mit dem Radius:

$$\frac{1}{2} C'D = NC' = ND = NC = \varrho.$$

Unter Einführung der Senkrechten MM' auf $C'D$ erhält man wieder, zunächst nach dem Sekantensatz:

$$MC \cdot MD = \overline{MN}^2 - \varrho^2,$$

und

$$\begin{aligned} M'C' \cdot M'D &= \overline{M'N}^2 - \varrho^2 \\ &= (\overline{MN}^2 - \overline{MM'}^2) - (\overline{MN}^2 - MC \cdot MD) \\ &= MC \cdot MD - \overline{MM'}^2 \\ &= \overline{MA'}^2 - \overline{MM'}^2 \\ &= \overline{M'A'}^2 = \overline{M'B'}^2. \end{aligned}$$

Hieraus folgt wieder durch Proportionsrechnung:

$$M'A' : M'C' = M'D : M'A',$$

also:

$$(M'A' + M'C') : (M'B' - M'C') = (M'D + M'A') : (M'D - M'B')$$

oder:

$$C'A' : C'B' = DA' : DB',$$

d. h. $A'C'B'D$ sind wieder vier harmonische Punkte.

Beweis II (geometrisch)

a) für inneren Pol P und äussere Polare p (Figur 69).

Ist in Figur 69 P Pol zu p und $CPDR$ eine beliebige Sekante durch P, so sind jedenfalls die Punkte $ABPQ$ vier harmonische Punkte, und CA, CB, CP, CQ vier harmonische Strahlen. Unter diesen sind aber $CA \perp CB$, folglich muss:

$$\sphericalangle BCD = BCE,$$

also wegen gleicher Peripheriewinkel auch Bogen $\widehat{BD} = \widehat{BE}$. Hieraus folgt, dass auch:

$$\sphericalangle BQD = BQE;$$

d. h. die zwei senkrechten Geraden QP, QR halbieren die Winkel der Geraden QD und QE. Demnach sind diese vier Strahlen des Punktes Q vier harmonische, also die vier von ihnen ausgeschnittenen Punkte $CDPR$ vier harmonische Punkte.

zeichnen und zwar mit Vertauschung der Buchstaben P, p, Q, q, S bezüglich in Q, q, P, p, R, so kann der Wortlaut des Beweises a unverändert für Beweis b giltig belassen werden.

Erkl. 276. Aus Antwort 36 und Erkl. 102 des VI. Teiles dieses Lehrbuches sind im nebenstehenden die Sätze benutzt: Wenn von vier harmonischen Strahlen zwei zugeordnete senkrecht stehen, so sind sie die Winkelhalbierenden der beiden andern. — Vier Strahlen, von welchen zwei die Winkelhalbierenden der beiden andern sind, sind vier harmonische Strahlen. — Der Beweis geschieht am einfachsten dadurch, dass man ein gleichschenkliges Dreieck mit der Höhe und der durch die Spitze gehenden Parallelen zur Grundseite benutzt: Die Eckpunkte der Grundseite, deren Mittelpunkt und deren unendlich ferner Punkt sind vier harmonische Punkte; und die vier von der Spitze ausgehenden Geraden sind vier harmonische Strahlen obengenannter Art.

Erkl. 277. Wenn in Figur 69 die Peripheriewinkel $BCD = BCE$, so müssen dieselben auf gleichem Bogen stehen, also $\widehat{BD} = \widehat{BE}$; und wenn $\widehat{BD} = \widehat{BE}$, so muss AB als Symmetrieachse gleiche Winkel bilden mit den beiderseitigen Strahlen PD, PE bezw. QD, QE.

b) für äusseren Pol Q und schneidende Polare q (Figur 69).

Ist in Figur 69 Q Pol zu q, und $QESC$ eine beliebige Sekante durch Q, so sind jedenfalls die Punkte $ABPQ$ vier harmonische Punkte, und CA, CB, CP, CQ vier harmonische Strahlen. Unter diesen sind aber $CA \perp CB$, folglich muss:

$$\sphericalangle BCD = BCE,$$

also wegen gleicher Peripheriewinkel Bogen $\widehat{BD} = \widehat{BE}$. Hieraus folgt, dass auch:

$$\sphericalangle BPD = BPE;$$

d. h. die zwei senkrechten Geraden PQ, PS halbieren die Winkel der Geraden PD und PE. Demnach sind diese vier Strahlen des Punktes P vier harmonische, also die von ihnen ausgeschnittenen Punkte $CESQ$ vier harmonische Punkte.

Frage 88. Welche veränderte Ausdrucksweise gestattet Satz 18?

Antwort. Man kann das Ergebnis der vorigen Antwort auch folgendermassen aussprechen:

Satz 18a. Wird auf jeder Sekante durch einen beliebigen Punkt P zu den Kreisschnittpunkten und dem Punkte P der vierte harmonische Punkt gesucht, so ist der geometrische Ort für den dem Punkte P zugeordneten vierten harmonischen Punkt eine gerade Linie, nämlich die Polare des Punktes P — und zwar für inneren Punkt P die ganze Polare, für äusseren Punkt P das innerhalb des Kreises liegende Stück der Polaren.

Denkt man sich daher die Sekante um P gedreht, so bewegt sich dieser vierte harmonische Punkt stets in gerader Linie. Dabei rücken die Kreisschnittpunkte der Sehne, je weiter diese sich vom Durchmesser entfernt, immer näher zusammen. Wird die Sekante zur Tangente, so fallen die Kreisschnittpunkte völlig zusammen; den vierten

Erkl. 278. Zur Giltigkeit eines geometrischen Ortssatzes gehören stets zwei Beweise. Im nebenstehenden Falle ist nachzuweisen: 1) dass wenn Punkt R bezw. S in Figur 69 der vierte harmonische ist auf PR bezw. QS, dann die Polare p bezw. q durch R bezw. S hindurchgehen muss; und 2) dass wenn R bezw. S auf der Polaren zu P bezw. Q liegt, dann R bezw. S der vierte harmonische Punkt zu P bezw. Q sein muss. — Der letztere Nachweis ist erbracht in Antwort der Frage 87. Der erstere ist am leichtesten auf den zweiten zu stützen mittels indirekten Beweisverfahrens. Denn angenommen, R bezw. S wäre nicht der Schnittpunkt der Polare, so braucht man nur die Polare selbst zu konstruieren, und erhält als Schnittpunkt jedenfalls den vierten harmonischen Punkt. Da nur ein einziger solcher besteht, so muss der Schnittpunkt der Polaren und der zuvor angenommene vierte harmonische Punkt zusammenfallen.

Erkl. 279. Aus Satz 18 folgt eine Konstruktionsweise der Polaren dadurch, dass man auf zwei beliebigen Sekanten die vierten harmonischen Punkte konstruiert und dieselben verbindet. Diese Gerade ist dann Polare. Dieselbe trifft wegen Satz 17 auch den Kreis in den Berührungspunkten der vom Pol ausgehenden Tangenten.

harmonischen Punkt schliessen sie aber noch zwischen sich, und so erhält man eine neue Ableitung für den Inhalt der Sätze 17a und b, dass die Polare q die Berührungspunkte der von Q an den Kreis gehenden Tangenten ausschneidet.

Frage 89. Welches ist der Hauptsatz der Polarentheorie? und wie wird derselbe bewiesen?

Erkl. 280. Der nebenstehende Satz lässt noch eine grosse Zahl verschiedener Ausdrucksweisen zu. Man kann ihn z. B. aussprechen wie folgt:

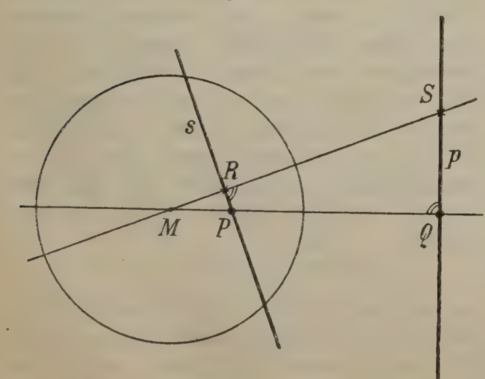
Satz 19a. Bewegt sich ein Punkt auf einer Geraden, so dreht sich seine Polare um den Pol dieser Geraden; und umgekehrt: Dreht sich eine Gerade um einen Punkt, so verschiebt sich ihr Pol auf der Polaren dieses Punktes.

Satz 19b. Der geometrische Ort für den Pol aller Geraden durch einen gegebenen Punkt ist eine gerade Linie, nämlich die Polare des festen Punktes.

Satz 19c. Die Verbindungsgerade zweier Punkte ist Polare des Schnittpunktes ihrer Polaren; und umgekehrt: Der Schnittpunkt zweier Geraden ist Pol der Verbindungsgeraden ihrer Pole.

Satz 19d. Der Gesamtheit aller Punkte einer Geraden entspricht durch polare Zuordnung die Gesamtheit aller Strahlen durch den Pol jener Geraden; und umgekehrt: Der Gesamtheit aller Geraden durch einen Punkt entspricht durch polare Zuordnung die Gesamtheit aller Punkte auf der Polaren jenes Punktes.

Figur 70.



Erkl. 281. Die letztgenannte Ausdrucksweise des Satzes 19d gibt die Grundlage zu einer

Antwort. Der Hauptsatz der Polarentheorie lautet folgendermassen:

Satz 19. Die Polaren sämtlicher Punkte einer gegebenen Geraden gehen durch den Pol dieser Geraden; oder in umgekehrter Ausdrucksweise:

Die Pole aller durch einen gegebenen Punkt gehenden Geraden liegen auf der Polaren dieses Punktes.

Da beide Sätze im Grunde identisch sind, braucht nur der eine, z. B. der erste davon, wirklich bewiesen zu werden. Zum Beweise dieses ersten Teiles hat man drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem nämlich a) die Gerade (p) ganz ausserhalb des Kreises liegt, — oder b) die Gerade (q) den Kreis schneidet und ein innerer Punkt U auf q betrachtet wird, — oder c) die Gerade (q) den Kreis schneidet und ein äusserer Punkt V auf q betrachtet wird. Und jedesmal kann der Beweis entweder algebraisch durch Rechnung oder geometrisch durch Konstruktion geführt werden.

Beweis I (algebraisch)

a) für eine äussere Gerade p.
(Figur 70.)

Ist in Figur 70 die Gerade p die Polare von P, also:

$$MP \cdot MQ = r^2,$$

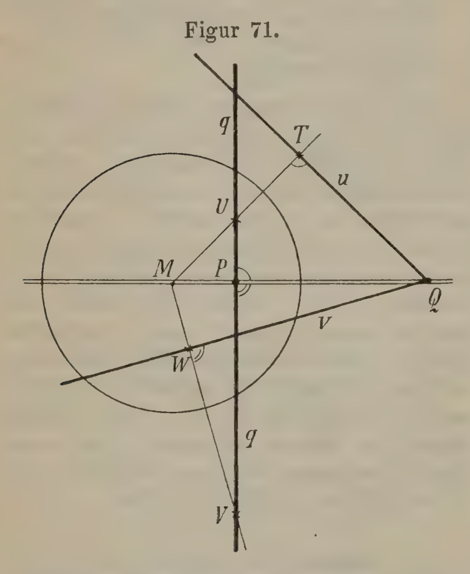
und S ein beliebiger Punkt auf p, so ist nachzuweisen, dass die Polare s von S durch P gehen muss. Denkt man sich zu dem Zweck nach Antwort 85 auf MS den Punkt R so konstruiert, dass:

$$MR \cdot MS = r^2,$$

so ist s die Senkrechte in R auf MS; und der Beweis ist zu liefern, dass diese

eigentümlichen Art von Zuordnung der Figuren ausserhalb eines gegebenen festen Kreises zu den Figuren im Innern dieses Kreises. Einer äusseren Figur aus Punkten entspricht eine innere Figur aus Geraden; einer äusseren Figur aus Geraden entspricht eine innere Figur aus Punkten. Dadurch gewinnt man eine theoretische Grundlage für alle die dualistischen und reciproken Gegenüberstellungen von Punktgebilden und Geradengebilden, wie solche schon im ersten Kapitel des III. Teiles dieses Lehrbuches und später (siehe Aufgabe 252 des VI. Teiles dieses Lehrbuches) durchgeführt worden sind. Diese Reciprocität oder Polarisation dient besonders als wichtiges Hilfsmittel in denjenigen Zweigen der Geometrie, welche unabhängig von Masseigenschaften durchgeführt werden, also in der sog. Geometrie der Lage, in der darstellenden Geometrie, Schattenlehre u. s. w.

Figur 71.



Erkl. 282. Nach den Sätzen 50 des IV. Teiles ist einerseits der Halbkreis über PS in Fig. 70 bezw. über QU oder QV in Figur 71 der geometrische Ort für die Scheitel aller rechten Winkel, deren Schenkel durch die Punkte PS bezw. QU oder QV hindurchgehen. Und andererseits ist nach Satz 25 desselben IV. Teiles dieses Lehrbuches allgemein ein Viereck ein Sehnenviereck, wenn die Summe zweier gegenüberliegenden Winkel 180° beträgt. Sind diese also rechte Winkel, so ist die Bedingung vollständig erfüllt.

Erkl. 283. Haben vier Punkte, wie $PQRS$ in Figur 70 bezw. $PQTU$ oder $PQVW$ in Figur 71 die Eigenschaft, dass für einen fünften Punkt M die Beziehung besteht:

$$MP \cdot MQ = MR \cdot MS$$

Senkrechte durch P geht. Bezeichnet man den Schnittpunkt dieser Senkrechten mit MQ vorläufig durch P', so ist jedenfalls $P'QSR$ ein Viereck mit zwei gegenüberliegenden rechten Winkeln bei Q und R, also ein Sehnenviereck; folglich wird die Gerade MQ von dem durch die Punkte QSR gehenden Kreise im Punkte P' getroffen. Ferner ist aber auch wegen obiger Konstruktion:

$$MP \cdot MQ = MR \cdot MS = r^2,$$

also $PQSR$ ein Sehnenviereck; und daher wird die Gerade MQ von dem durch dieselben Punkte QSR gehenden Kreise im Punkte P getroffen. Hiernach muss der Schnittpunkt P' der Polaren s mit MQ zusammenfallen mit dem Pol P von p, d. h. die Polare von S auf p geht durch den Pol P von p.

b) für einen inneren Punkt U einer schneidenden Geraden q.

(Figur 71 oben.)

Ist in Figur 71 q Polare von Q, also:

$$MP \cdot MQ = r^2,$$

und U ein innerer Punkt auf q, so ist nachzuweisen, dass die Polare u von U durch Q gehen muss. Konstruiert man hierzu den Punkt T auf MU so, dass:

$$MT \cdot MU = r^2,$$

so ist u die Senkrechte auf MU im Punkte T; und es soll bewiesen werden, dass diese Senkrechte durch Q geht. Bezeichnet man ihren Schnittpunkt mit MQ vorläufig durch Q', so ist wegen der rechten Winkel bei P und T jedenfalls $PQ'UT$ ein Sehnenviereck und Q' der Schnittpunkt der Geraden MP mit dem Kreise durch die Punkte PUT. Da aber auch:

$$MP \cdot MQ = MT \cdot MU = r^2,$$

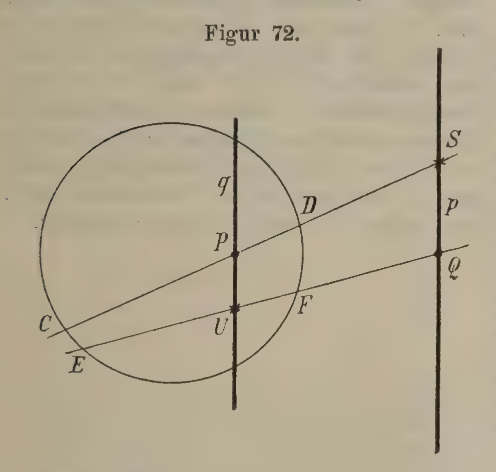
so ist auch $PQUT$ ein Sehnenviereck und Q der Schnittpunkt der Geraden MP mit demselben Kreise durch die Punkte PUT. Also muss der Schnittpunkt Q' mit Q zusammenfallen, d. h. die Polare u geht durch Q.

bezw. $= MT \cdot MU$ oder $= MV \cdot MW$, so müssen die vier Punkte auf einem Kreise liegen. Denn legt man durch die drei übrigen Punkte — unter Weglassung des einen, etwa des Punktes Q — den einzig möglichen Kreis, so wird dieser Kreis von der Sekante MP in einem Punkte Q' geschnitten, für welchen:

$$MP \cdot MQ' = MR \cdot MS = MP \cdot MQ$$

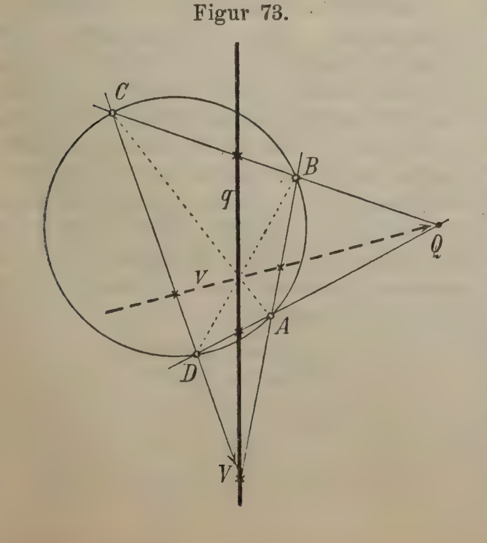
sein muss. Folglich kann der auf MP liegende Punkt Q' kein anderer sein, als Q selbst.

Figur 72.



Erkl. 284. Die Figuren zu den Beweisfällen I b) und c) sowie II a) und b) sind so einfach, dass die Vereinigung derselben in je einer Zeichnung (Figur 71 und 72) ohne die Herbeiführung irgend einer Verwechslung möglich war. Auch ist die Bezeichnung P für den inneren, Q für den äusseren Punkt jedesmal beibehalten, damit nicht derselbe Buchstabe einmal für ein inneres, dann für ein äusseres Element gebraucht werden muss.

Figur 73.



c) für einen äusseren Punkt V einer schneidenden Geraden q.

(Figur 71 unten.)

Man erhält wie zuvor ein Sehnenviereck $PQ'WV$ und ein Sehnenviereck $PQWV$, so dass die Punkte Q und Q' wieder zusammenfallen müssen.

Beweis II (geometrisch)

a) für eine äussere Gerade p.

(Figur 72 oben.)

Verbindet man den beliebigen auf p gelegenen Punkt S mit P, so entstehen jedenfalls vier harmonische Punkte $SPCD$. Der zu S zugeordnete Punkt P muss aber nach dem geometrischen Ortssatze 18a auf der Polaren von S liegen; oder mit andern Worten: die Polare von S muss durch P gehen.

b) für einen inneren Punkt U einer schneidenden Geraden q.

(Figur 72 unten.)

Verbindet man wieder U mit Q, so entstehen vier harmonische Punkte $UQEF$. Der zu U zugeordnete Punkt Q muss aber nach dem geometrischen Ortssatze 18a auf der Polaren zu U liegen; also muss die Polare zu U durch Q gehen.

c) für einen äusseren Punkt V einer schneidenden Geraden q.

(Figur 73.)

In Figur 73 sei V der äussere Punkt auf q, für dessen Polare v bewiesen werden soll, dass sie durch Q geht. Nun ziehe man von V aus eine beliebige Sekante AB durch den Kreis und verbinde Q mit deren beiden Schnittpunkten A und B, wobei die Sekanten QA, QB noch zwei Kreisschnittpunkte CD liefern. Die vier Punkte $ABCD$ bilden nun ein vollständiges Viereck mit Q als einer ersten Nebenecke; und nach Satz 20 und Aufgabe 252 des VI. Teiles dieses Lehrbuches werden auf den Seiten desselben durch die Verbindungsgeraden der Neben-

Erkl. 285. Man beachte den Unterschied der beiden Beweisführungen I und II. Während bei der ersten alle drei Fälle ziemlich analog durchzuführen sind, lassen sich die beiden ersten Fälle des zweiten Beweises, weil die Punkte PS bezw. QU durch eine Sekante verbunden werden können, ausserordentlich einfach beweisen. Der dritte Fall dagegen erfordert hier eine abweichende Behandlung, weil die Gerade QV den Kreis nicht trifft, also keine vier harmonischen Punkte auf ihr entstehen.

Erkl. 286. Der auffallendste Unterschied zwischen der algebraischen und geometrischen Beweisführung ist aber der folgende: Bei der ersten muss man — um eben algebraische Massgrössen anschreiben zu können — die Mittelpunktseigenschaften des Kreises als wesentliche Massbeziehungen in den Beweis eintreten lassen; und daher spielt auch in den Figuren 70 und 71 der Mittelpunkt M eine wichtige Rolle. Beim geometrischen Beweis dagegen ist vom Kreismittelpunkte gar nicht die Rede: in Fig. 72 und 73 tritt der Mittelpunkt M gar nicht auf.

Daher ist auch die erste, algebraische Beweisführung eine auf den Kreis beschränkte; die zweite, geometrische Beweisführung dagegen gilt nicht nur für den Kreis, sondern auch für alle die Kurven, bei welchen die Polarenbeziehung auf Grund des Satzes 18 Geltung hat. Die Beweise II können unmittelbar hinübergenommen werden in die Lehre von der Ellipse, Parabel, Hyperbel in der Geometrie der Lage.

Erkl. 287. Der im letzten Beweisfalle benützte Gedankengang bildet in allgemeinerer Ausführung den Gegenstand der folgenden Frage 90.

ecken die vierten harmonischen Punkte ausgeschnitten. Da nun q Polare von Q ist, so müssen nach Satz 18a die Schnittpunkte auf QDA und QBC die vierten harmonischen sein, folglich ist q die eine solche Verbindungsgerade von Nebenecken, und daher muss der Schnittpunkt V von q mit AB die zweite Nebenecke des Vierecks sein, d. h. CD muss mit AB durch V hindurchgehen. Die Verbindungsgerade der auf den Sekanten VAB und VCD auszuschneidenden vierten harmonischen Punkte muss dann gleichzeitig die Polare v zu V und auch die Verbindungsgerade von Q mit der dritten Nebenecke sein. Also muss v durch Q hindurchgehen.

Frage 90. Welche Beziehungen liefern die harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierecks, wenn die vier Ecken Punkte eines Kreises sind?

Erkl. 288. Der Beweis, dass PA, PB, PR, PQ vier harmonische Strahlen sind, wurde im VI. Teile dieses Lehrbuches nach folgendem Gedankengange geführt: 1) Denkt man auf einer ersten Seite AB zu A, B und R den vierten harmonischen Punkt H konstruiert und mit P und Q verbunden, so muss jeweils der vierte harmonische Strahl zu PA, PB und PR bezw. zu QA, QB und QR durch diesen gesuchten vierten harmonischen Punkt H gehen. 2) Denkt man sich ebenso auf einer zweiten Seite CD zu C, D, R den vierten harmonischen Punkt K konstruiert und mit P und Q verbunden, so muss jeweils der vierte harmonische Strahl zu denselben drei Strahlen PC, PD und PR bezw. zu denselben drei Strahlen QC, QD und QR durch diesen gesuchten vierten harmonischen Punkt K gehen. 3) Demnach geht durch

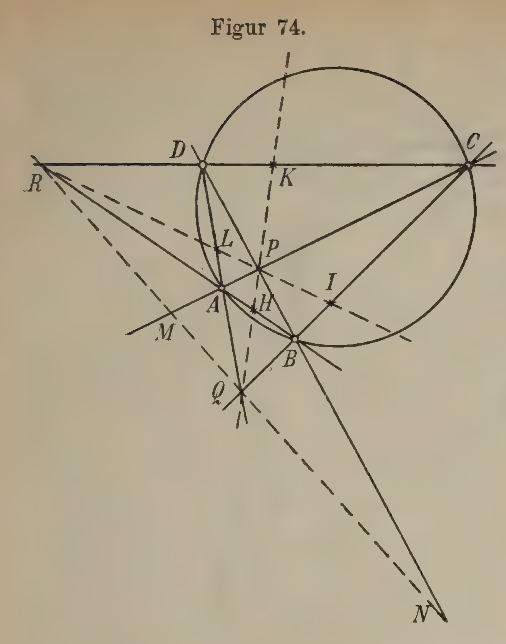
Antwort. Sind $ABCD$ in Figur 74 Eckpunkte eines vollständigen Vierecks, so sind AB, AC, AD, BC, BD, CD die sechs Seiten und P, Q, R die drei Nebenecken desselben. Nun sind nach Satz 21 des VI. Teiles dieses Lehrbuches die vier Strahlen durch P, durch Q und durch R jeweils vier harmonische Strahlen, folglich sind auch die Schnittpunkte jeder Geraden mit vier solchen Strahlen vier harmonische Punkte, nämlich:

$$\text{auf} \begin{cases} AB : ABRH; \\ CD : CDRK; \end{cases}$$

$$\text{auf} \begin{cases} AC : ACPM; \\ BD : BDPN; \end{cases}$$

$$\text{auf} \begin{cases} AD : ADQL; \\ BC : BCQI. \end{cases}$$

Figur 74.



die beiden gesuchten vierten harmonischen Punkte K und H sowohl der vierte harmonische Strahl von P als auch der vierte harmonische Strahl von Q; oder mit andern Worten: die Verbindungslinie der Punkte K und H geht sowohl durch P als durch Q, sie fällt also zusammen mit der Verbindungsgeraden PQ.

Erkl. 289. Man braucht eigentlich im nebenstehenden Beweise nur immer die zwei ersten Punkte nachzuweisen. Denn wenn HK Polare zu R und MN Polare zu P ist, so muss nach dem Satze 19 von selbst auch der Schnittpunkt Q von HK und MN der Pol zur Verbindungsgeraden PR sein, und umgekehrt.

Nun sind aber AB und CD zwei Sekanten von R durch den Kreis, und hiernach H und K deren vierte harmonische Punkte;

ebenso AC und BD zwei Sekanten von P durch den Kreis, und hiernach M und N deren vierte harmonische Punkte;

ebenso AD und BC zwei Sekanten von Q durch den Kreis, und hiernach L und I deren vierte harmonische Punkte.

Demnach muss auf Grund des Satzes 18a HK Polare zu R, MN Polare zu P und LI Polare zu Q sein. Und man erhält das bemerkenswerte Ergebnis:

Satz 20. Sind die vier Ecken eines vollständigen Vierecks Punkte eines Kreises, so bilden die drei Nebenecken ein Dreieck, von welchem

jede Seite Polare der Gegenecke, und:

jede Ecke Pol der Gegenseite

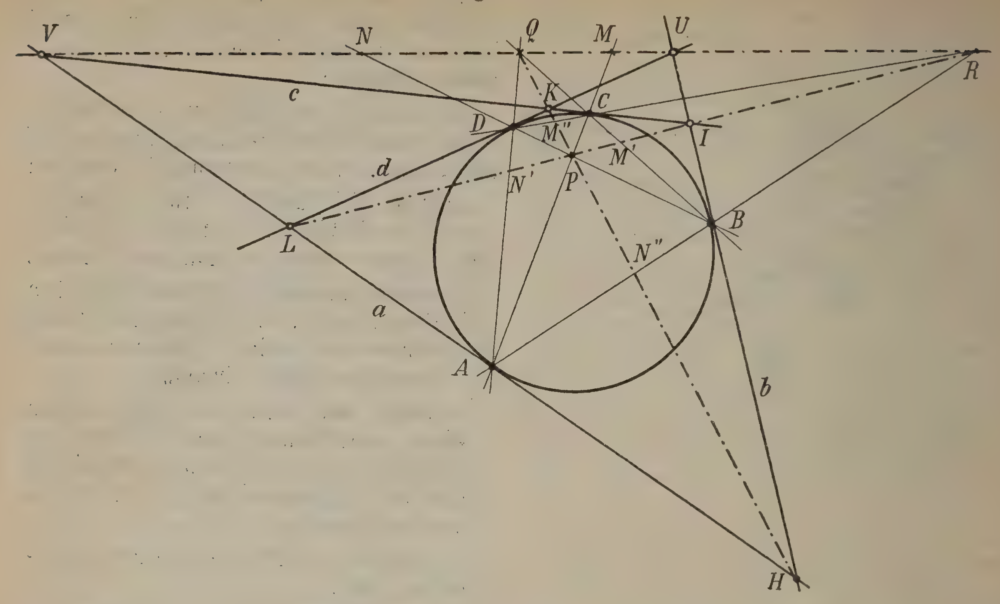
ist: ein sogenanntes Polardreieck.

Frage 91. Welche Beziehungen erhält man beim vollständigen Vierseit, wenn die vier Seiten Tangenten eines Kreises sind?

Erkl. 290. Wie sich bei der Lehre von den merkwürdigen Punkten des Dreiecks zeigt, ist es schon eine Besonderheit, wenn drei verschieden entstehende Geraden durch denselben Punkt gehen. In den Punkten P, Q, R der Figur 75 gehen aber sogar vier Gerade durch einen Punkt. Ausgegangen wird beim nebenstehenden Beweise zunächst von diesen Punkten P, Q, R als Schnittpunkten der Berührungssehnen des Tangentenvierseits; darauf folgt der Nachweis, dass durch jeden einzelnen dieser Punkte auch die Polare jedes der beiden andern Punkte hindurchgeht. Während der erste Punkt die einstweilige Namengebung P', Q', R' liefert,

Antwort. Sind $ABCD$ in Figur 75 die Berührungspunkte der Seiten eines vollständigen Vierseits, so sind H, I, K, L, U, V die sechs Ecken, und HK, IL, UV die drei Nebenseiten desselben. Nun sind nach Satz 17 die Ecken H, I, K, L, U, V die Pole der Berührungssehnen AB, BC, CD, DA, BD, AC. Bezeichnet man also vorläufig mit P', Q', R' die weiteren Schnittpunkte dieser sechs Geraden, so müssen erstens nach vorigem Satze 20 P', Q', R' die Pole der Seiten $Q'R'$, $R'P'$, $P'Q'$ sein; zweitens aber müssen nach Satz 19 P', Q', R' die Pole der Verbindungsgeraden

Figur 75.



so wird für den zweiten Gesichtspunkt aus der Identität von Berührungssehne und Polare gefolgert, dass die Schnittpunkte P, Q, R des Dreiseits der Nebenseiten HK, IL, UV keine andern sein können als dieselben Punkte $P'Q'R'$. Es fallen nämlich die Geraden der Reihe nach zusammen: HK mit PQ, IL mit PR, UV mit QR.

Erkl. 291. Die erste Formulierung des nebenstehenden Ergebnisses ist als Satz 20 a bezeichnet, um dadurch auf die vollkommene Analogie mit Satz 20 der vorigen Antwort hinzuweisen. Man kann beide Sätze vollkommen dualistisch nebeneinanderstellen, indem sich entsprechen:

Satz 20.	Satz 20 a.
Ecken eines Vierecks als Kreispunkte;	Seiten eines Vierseits als Kreistangenten;
Dreieck der Nebenecken.	Dreiseit der Nebenseiten.

Erkl. 292. In den Sätzen 21 und 21 a sind die vereinigt liegenden Elemente (Figur 75):
für Satz 21:

1) 2 Nebenecken Q und R des Sehnenvierecks $ABCD$ und 2 Ecken U, V des Tangentenvierseits $abcd$ auf der Geraden $RUQV$;

2) 2 Nebenecken R und P des Sehnenvierecks $ABCD$ und 2 Ecken I, L des Tangentenvierseits $abcd$ auf der Geraden $LPIR$;

3) 2 Nebenecken P und Q des Sehnenvierecks $ABCD$ und 2 Ecken H, K des Tangentenvierseits $abcd$ auf der Geraden $HPKQ$;

derjenigen Polpunkte sein, deren bereits bekannte Polaren durch diese drei Punkte gehen. Es gehen aber:

durch P' die Polaren AC von V und BD von U, so dass P' Pol der Geraden UV;

durch Q' die Polaren BC von I und DA von L, so dass Q' der Pol der Geraden IL;

durch R' die Polaren AB von H und CD von K, so dass R' Pol der Geraden HK.

Demnach ist sowohl $Q'R'$ als auch UV Polare von P, d. h. UV geht durch die Punkte Q und R;

ebenso ist sowohl $R'P'$ als auch IL Polare von Q, d. h. IL geht durch die Punkte R und P;

und sowohl $P'Q'$ als auch HK ist Polare von R, d. h. HK geht durch die Punkte P und Q;

denn jeder der Punkte P, Q, R, kann ja nur eine einzige Gerade als Polare haben und umgekehrt. Daher sind nun wirklich P, Q, R nicht nur die Schnittpunkte der Berührungssehnen AB, CD u. s. w., sondern auch zugleich Schnittpunkte der Nebenseiten HK, IL, UV

bezw. für **Satz 21a:**

1) 2 Nebenseiten HK, LI des Tangentenvierseits $abcd$ und 2 Seiten AC, BD des Sehnenvierecks $ABCD$ durch denselben Punkt P;

2) 2 Nebenseiten HK, UV des Tangentenvierseits $abcd$ und 2 Seiten BC, AD des Sehnenvierecks $ABCD$ durch denselben Punkt Q;

3) 2 Nebenseiten UV, LI des Tangentenvierseits $abcd$ und 2 Seiten AB, CD des Sehnenvierecks $ABCD$ durch denselben Punkt R.

Erkl. 293. In den Sätzen 21b und 21c ist von diesen je drei Eigenschaften jeweils nur die erste ausgesprochen und dadurch eine vereinfachte Gestalt des Satzes erzielt. Trotzdem ist der Satz aber nicht etwa minder allgemein. Denn man kann die vier Punkte $ABCD$ bezw. die vier Tangenten $abcd$ je in dreifacher Weise als einfaches Viereck bezw. Vierseit auffassen. Und während die erste Gruppe der obengenannten vereinigt liegenden Elemente entsteht durch die Aufeinanderfolge der Stücke $ABCD$ bezw. $abcd$, so entsteht die zweite Gruppe durch die Aufeinanderfolge $ACDBA$ bezw. $acdba$, die dritte Gruppe durch $ACBDA$ bezw. $acbda$. Im ersten Fall sind nämlich Gegenecken bezw. Gegenseiten A, C und B, D bezw. a, c und b, d; im zweiten Falle A, D und B, C bez. a, d und b, c; im dritten Falle A, B und C, D bezw. a, b und c, d. Lässt man also die Anwendung des Satzes in allen drei Arten nacheinander folgen, so erhält man aus demselben Satze eben nacheinander, was im vorhergehenden nebeneinander ausgesprochen ist.

Erkl. 294. Wegen der Eigenschaften des vollständigen Vierecks $ABCD$ sind in Figur 75 harmonische Punktepaare:

QR und MN auf QR; PR und $M'N'$ auf PR;
PQ und $M''N''$ auf PQ.

Wegen der Eigenschaften des vollständigen Vierseits $abcd$ sind harmonische Punktepaare:

QR und UV auf QR; PR und IL auf PR;
PQ und HK auf PQ.

Und wegen der Polaritätsbeziehung zwischen den Punkten und Seiten des Polardreiecks PQR sind auf den den Kreis schneidenden Geraden auch noch harmonische Punkte zu QP bezw. RP die Kreisschnittpunkte auf diesen Geraden. Bezeichnet man also für den Augenblick mit X, $X'X''$ die Mittelpunkte der Seiten des Polardreiecks, mit $Y'Z'$ bezw. $Y''Z''$ die Kreisschnittpunkte auf PR und PQ, so hat man die bemerkenswerten Gleichungen:

$$\overline{XQ}^2 = \overline{XR}^2 = XU \cdot XV = XM \cdot XN,$$
$$\overline{X'R}^2 = \overline{X'P}^2 = X'I \cdot X'L$$
$$= X'M' \cdot X'N' = X'Y' \cdot X'Z',$$
$$\overline{X''P}^2 = \overline{X''Q}^2 = X''K \cdot X''H$$
$$= X''M'' \cdot X''N'' = X''Y'' \cdot X''Z''.$$

(In der projektivischen Geometrie nennt man eine Punktgruppe wie PQ, KH, MN, YZ involutorisch.)

des Vierseits; und jede Seite des Dreiseits PQR ist Polare der Gegenecke. Man erhält also zunächst einen dualistisch entsprechenden Satz zu Satz 20, nämlich:

Satz 20a. Sind die vier Seiten eines vollständigen Vierseits Tangenten eines Kreises, so bilden die drei Nebenseiten ein Dreiseit, von welchem:

jede Ecke Pol der Gegenseite, und:

jede Seite Polare der Gegenecke ist: ein sogenanntes Polardreieck.

Ferner erhält man unter Berücksichtigung des Zusammentreffens zwischen den Elementen des Tangentenvierseits mit jenen des Sehnenvierecks $ABCD$ die Sätze:

Satz 21. Die drei Nebenecken eines vollständigen Sehnenvierecks und die sechs Ecken des von den Tangenten der Eckpunkte gebildeten vollständigen Tangentenvierseits liegen dreimal zu je zwei Paaren auf einer Geraden. — Und dualistisch entsprechend:

Satz 21a. Die drei Nebenseiten eines vollständigen Tangentenvierseits und die sechs Seiten des von den Berührungspunkten der Seiten gebildeten vollständigen Sehnenvierecks gehen dreimal zu je zwei Paaren durch einen Punkt.

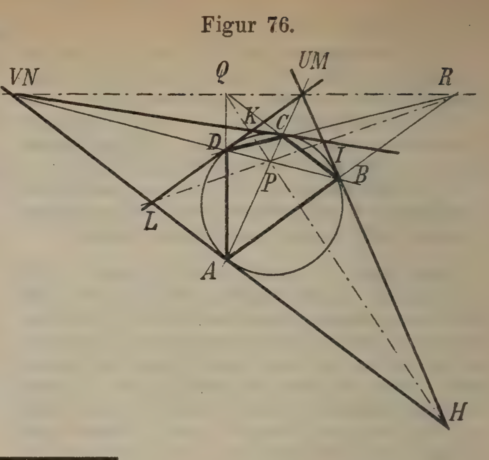
Ohne die Verallgemeinerung auf das vollständige Viereck bezw. Vierseit nehmen diese Sätze folgende einfache Gestalt an (vergl. später die Sätze 23b und 24b):

Satz 21b. Bei jedem (einfachen) Sehnenviereck liegen die Schnittpunkte der Gegenseiten und die der Tangenten der Gegenecken alle vier auf einer Geraden.

Satz 21c. Bei jedem (einfachen) Tangentenviereck gehen die Verbindungsgeraden der Gegenecken und die der Berührungspunkte auf Gegenseiten alle vier durch einen Punkt.

Erkl. 295. Es ist nicht ohne Interesse, an Figur 75 die Anzahl der unabhängigen Elemente festzustellen. Es sind dies nämlich nur die vier Punkte A, B, C, D bezw. die vier Tangenten a, b, c, d. Sind diese willkürlich gewählt, so hat man sich vor dem nicht seltenen Irrtum zu hüten, als ob M und N mit U und V zusammenfielen. Nur wenn nach Wahl von drei Punkten ABC der Punkt D so festgesetzt wird, dass D der Kreisschnittpunkt sei für die Verbindungsgerade des Punktes B mit dem Pole von AC — oder wenn nach Wahl von drei Tangenten abc die Tangente d so festgelegt wird, dass d die Tangente sei vom Schnittpunkte der Tangente b mit der Berührungssehne der Tangenten ac — dann fallen (Fig. 76) U und M bezw. V und N zusammen. Dann ist sowohl PQR als auch MNP bezw. UVP ein Polardreieck.

Figur 76.



b) Ueber die Inversion oder Spiegelung oder die Theorie der reciproken Radienvektoren.

Frage 92. Was versteht man unter der Theorie der Inversion?

Antwort. Unter der Theorie der Inversion versteht man die Zuordnung zweier Figuren in der Weise, dass je zwei entsprechende Punkte ein konstantes Abstandsprodukt von einem gegebenen festen Punkt liefern, wobei beide Abstände auf demselben Radiusvektor gemessen werden. Das Produkt kann entweder mit einer bestimmten Grösse (k^2) oder auch (durch Veränderung des Massstabes) mit 1 bezeichnet werden.

Erkl. 296. Inversion bedeutet „Umkehrung“, wird also hier in ähnlichem Sinne gebraucht wie „Spiegelung“, nämlich nach Art einer besondern Anwendung dieser Theorie in der Lehre vom Licht und der Elektricität. Radiusvektor oder Fahrstrahl ist die Verbindungsgerade eines veränderlichen Punktes mit einem festen Zentrum. Ist also etwa $r_1 \cdot r_2 = 1$, so ist $r_2 = \frac{1}{r_1}$ bezw. $r_1 = \frac{1}{r_2}$, und man hat reciproke Werte.

Frage 93. Was ist auf Grund der Definition über die Lage zugeordneter Punkte zu sagen?

Antwort. Zeichnet man um den Mittelpunkt einen Kreis mit dem Radius 1, so erkennt man sofort, dass jedem Punkte im Innern dieses Kreises ein Punkt ausserhalb entsprechen muss und umgekehrt, einem Punkte der Kreislinie selber aber derselbePunkt. Liegt also eine Figur ganz innerhalb des Grundkreises, so liegt die entsprechende Figur ganz ausserhalb, und umgekehrt. Schneidet die eine Figur den Grundkreis, so geht auch die andere Figur durch dieselben Schnittpunkte; der Grundkreis selbst ist, wie alle seine Punkte einzeln, auch als ganzer Kreis sich selbst zugeordnet. Sein ganzer

Erkl. 297. Setzt man (vergl. Erkl. 270) $r_1 \cdot r_2 = 1$, also $r_1 = \frac{1}{r_2}$, so muss gleichzeitig $r_1 < 1$ und $r_2 > 1$, und umgekehrt $r_1 > 1$ und $r_2 < 1$; für $r_1 = 1$ auch $r_2 = 1$. Für $r_1 = 0$ wird $r_2 = \frac{1}{0} = \infty$; für $r_1 = \infty$ wird $r_2 = \frac{1}{0} = \infty$.

Erkl. 298. Weil nach nebenstehendem Grundsatz jeder Figur eine andere entspricht, oder auch jede Figur in eine andere verwandelt wird, so spricht man auch von einer Transformation nach dem Princip der

reciproken Radien; man nennt den Grundkreis auch Transformationskreis, seinen Mittelpunkt das Transformationscentrum.

Innenraum entspricht der ganzen übrigen Ebene und umgekehrt. Dem Mittelpunkt des Grundkreises entspricht das ganze unendlich ferne Gebiet der Ebene und umgekehrt.

Frage 94. Welches ist die inverse Figur einer Geraden?

Figur 77.

Erkl. 299. In Figur 77 sind die drei Fälle dargestellt, welche die Lage der Geraden g aufweisen kann.

1) Liegt g_1 ganz ausserhalb des Kreises, so liegt G_1 und der ganze Kreis über Durchmesser MG innerhalb des Grundkreises.

2) Liegt g_2 als Tangente am Grundkreis, so ist G_2 ihr Berührungspunkt, und der Radius des Grundkreises wird der Durchmesser des entsprechenden Kreises, welcher ebenfalls den Punkt G mit dem Grundkreis wie mit g gemeinsam hat.

3) Ist g_3 Sekante des Kreises, so liegt sie teils innerhalb, teils ausserhalb; ihr Pol G_3 liegt ausserhalb, also auch der Kreis über Durchmesser MG_3 teils ausserhalb, teils innerhalb. Die Schnittpunkte von g_3 mit dem Grundkreis sind zugleich Schnittpunkte des Grundkreises mit dem Kreis über Durchmesser MG_3, denn der Pol G_3 entstand ja durch die Tangenten daselbst.

Antwort. 1) Geht die Gerade durch den Mittelpunkt M, so entspricht sie sich selber, insofern ihre sämtlichen äusseren Punkte ihren inneren zugeordnet sind, und umgekehrt.

2) Um die entsprechende Figur einer beliebig gegebenen Geraden g zu finden, fällt man zunächst eine Senkrechte vom Transformationscentrum auf diese Gerade; dann ist gegen diese Gerade als Achse jedenfalls Symmetrie vorhanden. Der auf ihr liegende Pol G der gegebenen Geraden g in Bezug auf den Grundkreis ist nach Erkl. 270 der entsprechende Punkt für den Fusspunkt der Geraden; dem unendlich fernen Punkt der Geraden entspricht ferner der Mittelpunkt des Grundkreises. Für jeden weiteren Punkt der Geraden kann man den entsprechenden finden, indem man die Polare dieses Punktes schneidet mit der Verbindungsgeraden vom Mittelpunkte nach dem Punkte. Nun gehen aber die Polaren aller Punkte auf g durch den Pol G; folglich sind die entsprechenden Punkte zu den Punkten der Geraden g die Scheitel der rechten Winkel, deren Schenkel durch M und G gehen: diese erfüllen aber den Kreis mit Durchmesser MG.

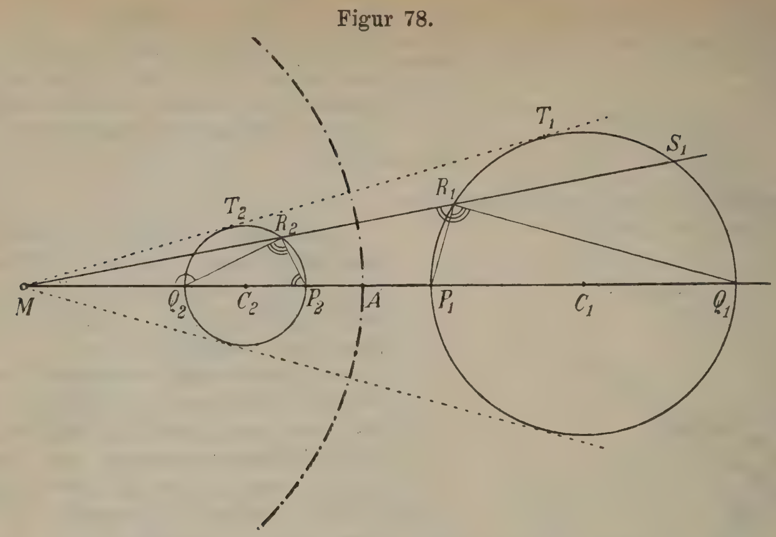
Also ist die inverse Figur einer beliebigen Geraden ein Kreis, welcher die Verbindungsstrecke des Transformationsmittelpunktes mit dem Pole dieser Geraden zum Durchmesser hat.

Frage 95. Welches ist die inverse Figur eines Kreises?

Erkl. 300. Es gibt, wie der erste nebenstehende Fall es erfordert, thatsächlich ebenso

Antwort. 1) Geht der Kreis durch den Mittelpunkt M, so entspricht ihm nach voriger Antwort eine Gerade, die senkrecht steht auf dem von M aus-

Figur 78.



viele Geraden in der Ebene, als Kreise durch einen festen Punkt, nämlich je doppelt unendlich viele (∞^2): Geraden gibt es zu jeder der ∞ vielen Richtungen durch M noch ∞ viele Parallelen; und für Kreise durch M gibt es auf jeder der ∞ vielen Richtungen durch M noch ∞ viele Durchmessergrössen.

Erkl. 301. Liegt der Kreis durch M ganz innerhalb des Grundkreises, so liegt die Gerade g_1 ganz ausserhalb; berührt der Kreis den Grundkreis, so thut dies auch die Gerade g_2 im gleichen Punkte; schneidet der Kreis den Grundkreis in zwei Punkten, so geht auch die Gerade g_3 durch dieselben zwei Punkte (vergl. Figur 77).

Erkl. 302. Für die feste Sekante MP_1 in nebenstehendem Beweise b ist an Figur 78 der Durchmesser des gegebenen Kreises gewählt, weil dieser im Beweis c benützt wird. Jede andere Sekante erfüllt aber denselben Zweck. Beide erste Beweise a und b sind völlig unabhängig von den Mittelpunktseigenschaften des zu transformierenden Kreises durchzuführen. — Ebenso bedarf es keiner besondern Erwähnung, dass man die Buchstaben $P_1 Q_1 R_1$ und $P_2 Q_2 R_2$ auch vertauschen d. h. den Kreis 2 als gegeben betrachten kann, ohne die Beweisführung irgend zu ändern.

Erkl. 303. Aus jeder der nebenstehenden Beweisführungen erkennt man sofort, dass der Transformationsmittelpunkt M der äussere Aehnlichkeitspunkt der beiden entsprechenden Kreise ist, dass jedoch die beiden Mittelpunkte C_1 und C_2 keine entsprechenden reciproken, sondern ähnlich liegende Punkte sind. Für den Grundkreis mit Radius MA gilt die Beziehung:

$$\overline{MA}^2 = MP_1 \cdot MP_2 = MQ_1 \cdot MQ_2.$$

gehenden Durchmesser als Polare seines Endpunktes in Bezug auf den Transformationskreis.

2) Geht der Kreis nicht durch M, so kann man in verschiedener Weise verfahren:

a) Nach Satz 8 und Erkl. 191 dieses Teiles bildet die Gesamtheit der Punkte, welche auf den Sekanten eines festen Punktes durch einen Kreis Strecken mit konstantem Abstandsprodukte der Endpunkte vom Anfangspunkte abschneiden, wieder einen Kreis.

b) Zieht man durch den gegebenen Kreis C_1 in Figur 78 eine beliebige feste Sekante von M, welche ihn trifft in den Punkten $P_1 Q_1$, und eine zweite veränderliche Sekante von M, welche die Punkte R_1 und S_1 liefert, so besteht nach dem Sekantensatz die Gleichung:

$$MP_1 \cdot MQ_1 = MR_1 \cdot MS_1.$$

Sind nun P_2 und R_2 die entsprechenden Punkte zu P_1 und R_1, so muss auch nach dem Princip der reciproken Radien

$$MP_1 \cdot MP_2 = 1 = MR_1 \cdot MR_2$$

sein. Durch andere Schreibung obiger Produktengleichungen in Quotientenform entsteht:

$$\frac{MP_1}{MR_1} = \frac{MS_1}{MQ_1} = \frac{MR_2}{MP_2}$$

oder:

$$MS_1 : MR_2 = MQ_1 : MP_2.$$

Daher ist für die zwei entsprechenden Kreise der Grundkreis derjenige, welcher die sog. „gemeinschaftliche Potenz" als Quadrat des Radius hat, oder der „Potenzkreis" (vergl. Erkl. 248). Unter Bezugnahme auf die Ergebnisse der Abschnitte 4 und 5 dieses Teiles folgen daher für die Beziehung zwischen reciprok entsprechenden Kreisen und dem Grundkreise alle die Eigenschaften, welche dort über inverse Punkte zweier Kreise aufgestellt wurden: Der Grundkreis gehört insbesondere zu dem von den zwei entsprechenden Kreisen bestimmten Kreisbüschel (siehe die folgende Frage 97).

Erkl. 304. Liegt der eine Kreis ganz ausserhalb des Grundkreises, so liegt der reciproke ganz innerhalb, und umgekehrt. Berührt oder schneidet der eine den Grundkreis, so thut dies auch der andere, und zwar in denselben Berührungspunkten bezw. Schnittpunkten. Da ferner beide Kreise als ganze ähnliche Figuren sind, so ist die Tangente am einen in Figur 78 zugleich Tangente am andern, aber dem Bogen P_1T_1 entspricht der inverse Bogen P_2T_2 (nicht der ähnliche Bogen Q_2T_2). — Umschliesst der eine Kreis den Transformationsmittelpunkt, so thut dies auch der andere als Halbkreis über den reciproken Punkten zu den Durchmesserendpunkten des ersten; einem koncentrischen Kreise zum Grundkreise entspricht schon auf Grund der ursprünglichen Definition in Antwort 92 wieder ein koncentrischer. Aber in beiden Fällen entspricht der Innenfläche des einen Kreises die Aussenfläche des andern; die gemeinsamen Flächenstücke beider Kreise sind keinenfalls selbstentsprechende; denn die etwaigen Schnittpunkte sind die einzigen sich selbst zugeordneten Elemente.

Erkl. 304a. Man kann das nebenstehende Ergebnis in Worte fassen wie folgt:

Die inverse Figur eines beliebig gezogenen Kreises ist wieder ein Kreis. Sein Durchmesser ist die Verbindungsstrecke der inversen Punkte zu den Endpunkten des durch den Transformationsmittelpunkt gehenden Durchmessers des ursprünglich gegebenen Kreises.

Nun sind aber MS_1, MQ_1 und MR_2, MP_2 die Abschnitte der von M ausgehenden Sekanten durch den gegebenen Kreis und dessen entsprechende Figur. Nach Antwort 49 und Erkl. 152 dieses Teiles bildet aber die Gesamtheit der Punkte, welche auf den Sekanten eines festen Punktes durch einen Kreis Strecken mit konstantem Abstandsverhältnis der Endpunkte vom Anfangspunkte abschneiden, wieder einen Kreis.

c) Wählt man für die erste feste Sekante von M aus den Durchmesser, und verbindet die Punkte R_1 bezw. R_2 der veränderlichen Sekante mit dessen Endpunkten, so ist jedenfalls:

$$\sphericalangle P_1R_1Q_1 = 90^0$$

für jede Lage des veränderlichen Punktes R_1. Nun ist nach dem Grundsatze der Inversion:

$$MP_1 \cdot MP_2 = MQ_1 \cdot MQ_2 = MR_1 \cdot MR_2 = 1,$$

also:

$$\frac{MP_1}{MR_1} = \frac{MR_2}{MP_2}$$

und auch:

$$\frac{MQ_1}{MR_1} = \frac{MR_2}{MQ_2}.$$

Nun sind aber MP_1, MR_1 und MR_2, MP_2 bezw. MQ_1, MR_1 und MR_2, MQ_2 die den gemeinsamen Winkel M einschliessenden Seiten der Dreiecke MP_1R_1 und MR_2P_2 bezw. MQ_1R_1 und MR_2Q_2. Folglich sind diese Dreiecke einander ähnlich, und man hat:

$$\triangle MP_1R_1 \sim MR_2P_2,$$

also:

$$\sphericalangle MP_2R_2 = MR_1P_1;$$

und

$$\triangle MQ_1R_1 \sim MR_2Q_2,$$

also:

$$\sphericalangle MQ_2R_2 = MR_1Q_1.$$

Folglich ist auch:

$$\sphericalangle MR_1Q_1 - MR_1P_1 = \sphericalangle MQ_2R_2 - MP_2R_2.$$

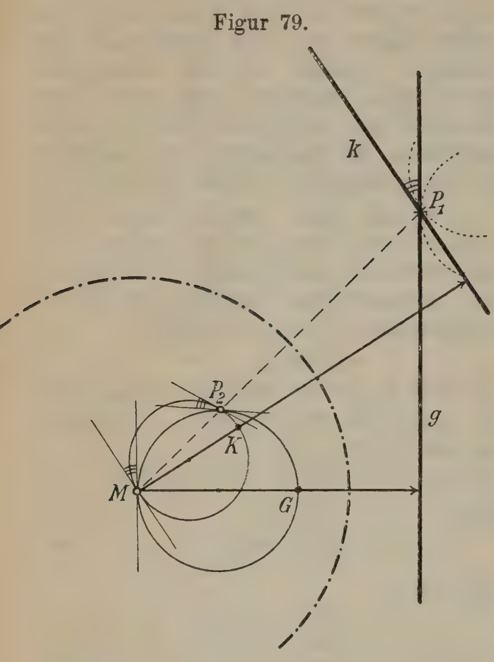
Ersteres ist aber der Wert des rechten Winkels $P_1R_1Q_1$, letzteres ist im Dreieck $P_2Q_2R_2$ der Wert des Winkels $P_2Q_2R_2$, da der Aussenwinkel:

$$MQ_2R_2 = Q_2P_2R_2 + P_2R_2Q_2$$

ist. Also ist auch $P_2Q_2R_2 = 90^0$ für jede beliebige Lage des veränderlichen Punktes R_2, und folglich durchläuft auch R_2 einen Kreis, wenn R_1 einen solchen durchläuft.

Frage 96. Was wird durch die Inversion aus dem Schnittwinkel zweier Geraden oder zweier Kreise?

Figur 79.



Erkl. 305. Ist P_1 in Figur 79 der Schnittpunkt zweier Kreise, so dass g und k die Tangenten dieser Kreise in P_1 sind, so müssen die entsprechenden Kreise durch den Punkt P_2 gehen und dort sich schneiden unter demjenigen Winkel, unter welchem sich die den Geraden g und k entsprechenden Kreise schneiden. Es transformieren sich zwar nicht die Tangenten g und k zu den Tangenten der entsprechenden Kreise, aber der Winkel der Kreise in P_1 ist der Winkel der Tangenten in P_1; der Winkel der Tangenten in P_1 wird zum Winkel zweier Kreise in P_2; und der Winkel dieser Kreise in P_2 ist wieder der Winkel der Tangenten in P_2.

Erkl. 306. Im Punkte P_2 hat man sich nach vorigem vier schneidende Kreise zu denken, nämlich zwei den Kreisen durch P_1 entsprechende und zwei den Geraden g, k durch P_1 entsprechende. Da von letzteren in P_1 je zwei einander berühren, so müssen auch in P_2 je zwei Kreise einander berühren, d. h. gemeinsame Tangenten haben. Und diese beiden Tangenten bilden nun in P_2 denselben Winkel, wie jene in P_1.

Erkl. 307. Denkt man sich auf den den Geraden g und k entsprechenden Kreislinien im Punkte P_2 so unendlich kleine Linienelemente gewählt, dass dieselben als geradlinig ange-

Antwort. Da der Winkel zweier Kreise gemessen wird durch den Schnittwinkel ihrer Tangenten im Schnittpunkte, so ist die Frage nach der Transformation des Schnittwinkels zweier Kreise völlig identisch mit der Frage nach der Transformation des Winkels zweier Geraden.

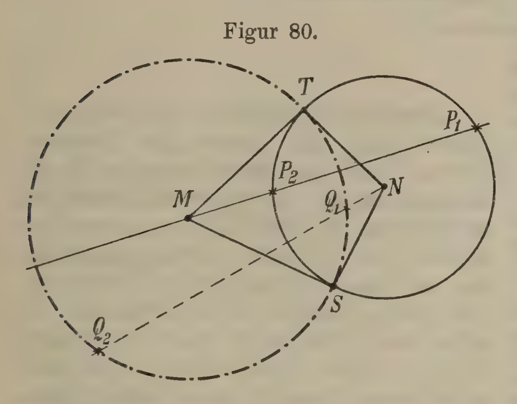
Nun wurden nach Antwort 94 die durch Punkt P_1 gehenden Geraden g und k transformiert zu den zwei Kreisen durch P_2 und M, deren Durchmesser auf g und k senkrecht stehen, nämlich zusammenfallen mit der Verbindungsstrecke von M nach den Polen G und K der Geraden g und k. Diese beiden Kreise schneiden sich aus Gründen der Symmetrie (vergl. die Antworten 109 und 122 des IV. Teiles dieses Lehrbuches) im Schnittpunkte P_2 unter demselben Winkel, wie im andern Schnittpunkt M. Dort aber ist die Tangente an jeden Kreis senkrecht zum Durchmesser, also parallel und gleichgerichtet zu g bezw. k; folglich ist der Winkel der Tangenten in M, und demnach auch der Winkel der Tangenten in P_2 und der Kreise in P_2 gleich dem Winkel der ursprünglichen Geraden g und k selbst. Man erhält also den wichtigsten Satz der Inversionstheorie.

Satz 22. Der Schnittwinkel zweier beliebigen Geraden oder Kreise ist gleich dem Schnittwinkel der diesen Geraden oder Kreisen durch Inversion zugeordneten Figuren.

sehen werden können, so kann man nebenstehenden Satz dahin aussprechen, dass zwei unendlich kleine Dreiecke in zwei invers zugeordneten Figuren dieselben Winkel haben, also ähnlich sind. Man spricht daher von einer „winkeltreuen" (isogonalen, conformen) Abbildung der Ebene durch Inversion. Und diese Aehnlichkeit in kleinsten Teilen (welche bei endlicher Grösse der Figur völlig aufhört) ist ein Hauptgrund für die Wichtigkeit der Inversion in der höheren Physik und Geometrie. (Dazu kommt aber noch der Umstand, dass die „Geometrie der reciproken Radien" sich gegenüber Kongruenz und Aehnlichkeit als ein völlig selbständiges Gebiet der Raumbetrachtungen aufstellen lässt.)

Frage 97. Wie transformiert sich ein Kreis, der durch zwei reciproke Punkte hindurchgeht?

Figur 80.



Erkl. 308. Auf Grund der nebenstehenden Ueberlegung kann man eine Reihe von Sätzen über die Inversion aufstellen, an deren Spitze das eigentliche Ergebnis steht, wie folgt:

Satz a. Jeder Kreis durch ein Paar reciproke Punkte ist sich selbst invers zugeordnet, enthält also auf jedem Durchmesser des Grundkreises lauter reciproke Punktepaare.

Satz b. Je zwei Paare reciproker Punkte bilden ein Sehnenviereck.

Satz c. Jeder Kreis durch ein Paar reciproker Punkte ist Orthogonalkreis des Grundkreises.

Satz d. Jeder Orthogonalkreis des Grundkreises ist sich selbst invers zugeordnet.

Satz e. Auf jedem Durchmesser eines Kreises werden durch jeden Orthogonalkreis vier harmonische Punkte gebildet.

Satz f. Ein Kreis und ein Orthogonalkreis können wechselseitig als Grundkreise der Inversion benutzt werden, so dass jeder in sich selbst transformiert wird.

Antwort. Geht ein Kreis durch zwei reciproke Punkte P_1 und P_2, so muss er, weil von diesen Punkten stets einer innerhalb und einer ausserhalb des Grundkreises liegt, den Grundkreis in zwei Punkten T und S schneiden. Der entsprechende Kreis muss nun jedenfalls durch dieselben zwei Punkte T und S, als selbstentsprechende Punkte auf dem Grundkreise, gehen; ausserdem aber auch durch P_2, weil der ursprüngliche durch P_1 ging, und durch P_1, weil der ursprüngliche durch P_2 ging. Der neue Kreis hat also mit dem ursprünglichen vier gemeinsame Punkte, ist also mit ihm identisch, nur entspricht dem Kreisbogen SP_1T der Bogen SP_2T und umgekehrt; der Schnittwinkel des Grundkreises mit dem Bogen SP_1T muss gleich sein dem Schnittwinkel desselben Grundkreises mit dem Bogen SP_2T. Da diese Winkel aber entgegengesetzt liegen, so muss jeder ein rechter Winkel sein, der Kreis um N wird ein Orthogonalkreis des Grundkreises.

Dasselbe lässt sich auch durch Rechnung nachweisen: Nach dem Inversionsgrundsatze ist:

$$MP_1 \cdot MP_2 = \overline{MS}^2 = \overline{MT}^2 = 1.$$

Nach dem Tangentensatze ist aber auch $MP_1 \cdot MP_2$ gleich dem Quadrat der von M an den Kreis N gezogenen Tangenten. Folglich müssen MT und MS diese Tangenten sein; da dieselben Strecken MS und MT aber auch Radien des Grundkreises sind, so müssen die Radien

Erkl. 309. Bei der Inversion des Kreises N in Figur 80 entspricht jeder Punkt des Grundkreises sich selbst, daher entspricht dem Kreisflächenstück TP_2SQ_1T das Kreisflächenstück TP_1SQ_1T und umgekehrt. Der Mittelpunkt N entspricht keineswegs sich selbst, sondern einem Punkt im erstgenannten Flächenstück. Ueberhaupt kann N nie auf den Grundkreis rücken, denn es gibt keinen Orthogonalkreis, dessen Mittelpunkt auf der Peripherie selbst liegt. Die Tangenten NT und NS fielen in eine Tangente zusammen, wenn N an die Peripherie des Grundkreises heranrückt; und der Kreis N würde zu einem (allerdings dann selbstentsprechenden) Punkte auf der Peripherie des Grundkreises.

Erkl. 310. Wird der Kreis N als Grundkreis gewählt, so entspricht Bogen TP_2S sich selbst, Bogen TQ_1S dem Bogen TQ_2S, also Kreisflächenstück TQ_1SP_2T dem Flächenstück TQ_2SP_2T u. s. w.

NS und NT auf den Radien MS und MT senkrecht stehen.

Zieht man daher durch M beliebig viele Sekanten des Kreises N, so ist jedes Paar von Schnittpunkten ein Paar reciproker Punkte, weil jedesmal:

$$MP_1 \cdot MP_2 = MT^2.$$

Zieht man aber durch N beliebige Sekanten NQ_1Q_2, so ist auch jedesmal:

$$NQ_1 \cdot NQ_2 = NT^2,$$

also sind auch alle Punktepaare Q_1Q_2 reciproke Punktepaare in Bezug auf den Kreis N. Wählt man also den Kreis N als Transformationskreis, so ist der Kreis M ein selbstentsprechender Kreis, der durch Inversion in sich selbst transformiert wird.

Frage 98. Welche merkwürdigen Ergebnisse liefert die Anwendung der vorigen Ergebnisse auf die beiden Kreisbüschel in Figur 81?

Erkl. 311. Unter den Kreisen des ersten Büschels M ist auch jeweils einer, der in A und B den aus diesem Büschel beliebig gewählten Grundkreis rechtwinklig schneidet. Dieser wird in sich selbst transformiert, und bildet mit dem Grundkreis selbst das einzige solche Kreispaar des Büschels M, denn jeder andere Kreis wird in einen verschiedenen verwandelt. — Die Gerade CM insbesondere bleibt selbstentsprechende Gerade, die Gerade CP dagegen entspricht dem Kreise, welcher die Strecke vom Grundkreismittelpunkte M zum Pol der Geraden CP in Bezug auf den Grundkreis als Durchmesser hat; und ebenso umgekehrt.

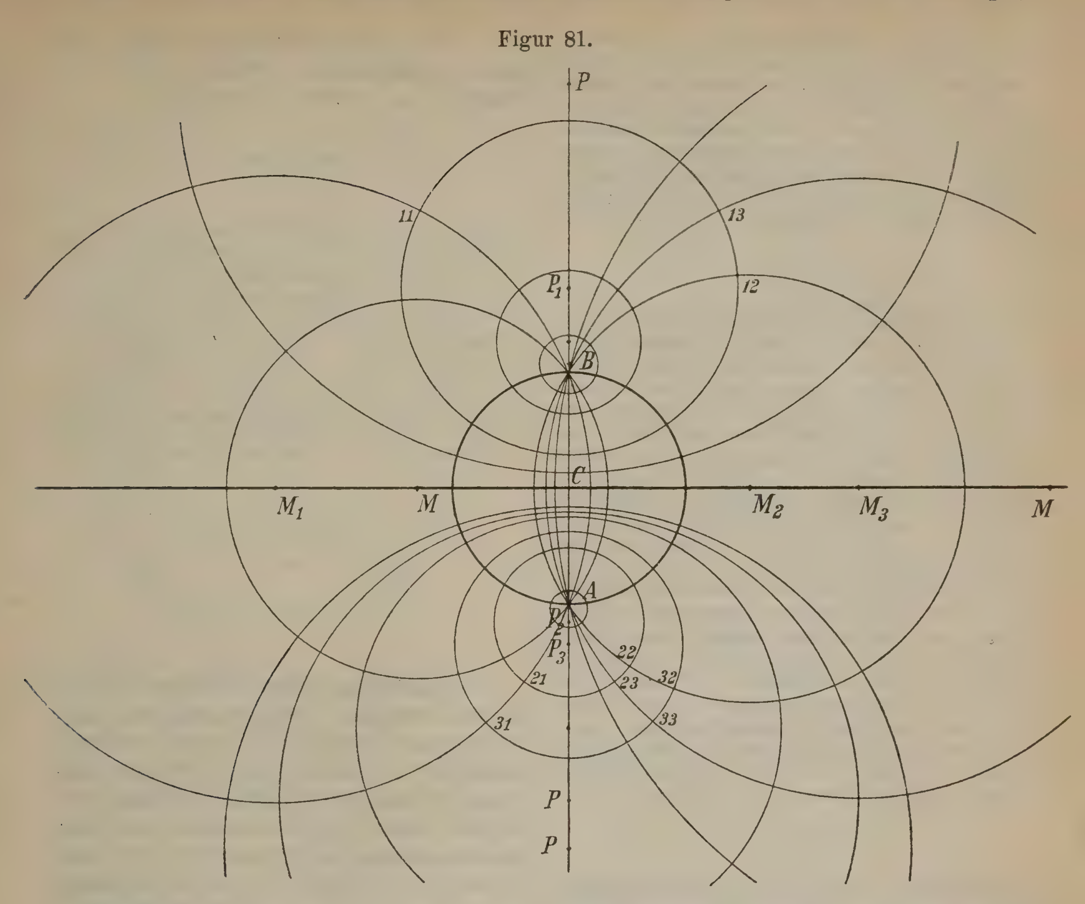
Erkl. 312. Wählt man aber den kleinsten aller Kreise M, nämlich den Halbkreis über Durchmesser AB als Grundkreis, dann bleiben beide Geraden CP und CM selbstentsprechende Geraden, die Kreise P bleiben selbstentsprechende Orthogonalkreise, und von den Kreisen M muss jeder zu einem solchen werden, der auch mit der selbstentsprechenden Geraden CP gleiche und entgegengesetzte Schnittwinkel bildet. Das können aber nur die zu CP beiderseits symmetrisch liegenden Kreise sein. Die Inversion der Figur 81 mit Transformationsmittelpunkt C hat also dieselbe Folge, wie Umklappung um CP als Achse.

Erkl. 313. Die Richtigkeit der letzteren Behauptung lässt sich auch durch Rechnung

Antwort. 1) Wählt man in Figur 81 irgend einen der Kreise des Büschels erster Art mit Mittelpunkten M als Inversionskreis, so wird für denselben (vergl. Satz 16) jeder Kreis des zweiten Büschels P zu einem Orthogonalkreis, also zu einem selbstentsprechenden. Die Kreise des ersten Büschels M gehen aber alle durch dieselben Punkte A und B des Grundkreises, also wird jeder dieser Kreise in einen andern desselben Büschels transformiert, welcher den Grundkreis in denselben Punkten unter gleichem aber entgegengesetzt gerichtetem Winkel schneidet. Die Gesamtfigur 81 bleibt also identisch sich selbst reciprok.

2) Wählt man irgend einen der Kreise des zweiten Büschels mit Mittelpunkten P als Inversionskreis, so wird für denselben jeder Kreis des ersten Büschels M zu einem Orthogonalkreis, also zu einem selbstentsprechenden. Ein beliebiger Kreis des zweiten Büschels P selbst aber, der etwa einen dieser selbstentsprechenden Kreise in einem Punkte ausserhalb des Grundkreises trifft, muss transformiert werden zu einem Kreise, welcher denselben selbstentsprechenden Kreis in dem entsprechenden Punkte innerhalb des Grund-

Figur 81.



nachweisen: Nennt man in Figur 81 für den Augenblick $E_1 D_1$ bezw. $E_2 D_2$ die Schnittpunkte zweier inversen Kreise des Büschels M, so muss wegen der Inversion:

$$CD_1 \cdot CD_2 = CE_1 \cdot CE_2 = \overline{CA}^2 = \overline{CB}^2$$

sein. Nach dem Sekantensatz gilt aber auch:

$$CD_1 \cdot CE_1 = CD_2 \cdot CE_2 = \overline{CA}^2 = \overline{CB}^2.$$

Also muss:

$$CE_1 = CD_2$$

und

$$CD_1 = CE_2$$

sein. Allerdings bleibt zwischen Inversion und Umklappung der grosse Unterschied, dass während bei der letzteren kongruente Bogen beiderseits CP zur Deckung gelangen, bei der Inversion jeder Kreisbogen einerseits CP mit demjenigen Kreisbogen auf derselben Seite von CP zugeordnet wird, welcher dem kongruenten Kreise der andern Seite angehört. In diesem Falle wird also wirklich die Wirkung der Inversion mit der der gewöhnlichen Spiegelung gegen eine Gerade identisch.

Erkl. 314. Unter den Kreisen des Büschels P ist der gewählte Grundkreis der einzige, der kreises trifft, und zwar nach Satz 22 wieder unter einem rechten Winkel. Da aber das Büschel P sämtliche Orthogonalkreise des Büschels M enthält, so muss dieser neue Kreis wieder einer des Büschels P sein, und zwar nach Erkl. 303 derjenige davon, welcher mit dem erstgewählten zusammen den Inversionsmittelpunkt als äusseren Aehnlichkeitspunkt hat. Die Gesamtfigur 81 bleibt also wieder identisch sich selbst reciprok.

3) Wählt man einen der festen Punkte A (oder B) als Inversionsmittelpunkt mit beliebigem Grundkreis, so werden sämtliche Kreise des Büschels M nach Antwort der Frage 95 zu geraden Linien durch den dem Punkte B (oder A) entsprechenden Punkt, sämtliche Kreise des Büschels P zu Kreisen, welche von diesen Geraden senkrecht getroffen wer-

in sich selbst transformiert wird. — Im nebenstehenden wird wiederholt Gebrauch gemacht von dem Satze 22 in der besonderen Fassung, dass von den zwei schneidenden Geraden oder Kreislinien die eine eine sich selbstentsprechende ist. Da hierbei doch stets entsprechende Bogenstücke zum Schnitt unter gleichen Winkeln gebracht werden müssen, so werden die zu ziehenden Folgerungen bedeutend erleichtert.

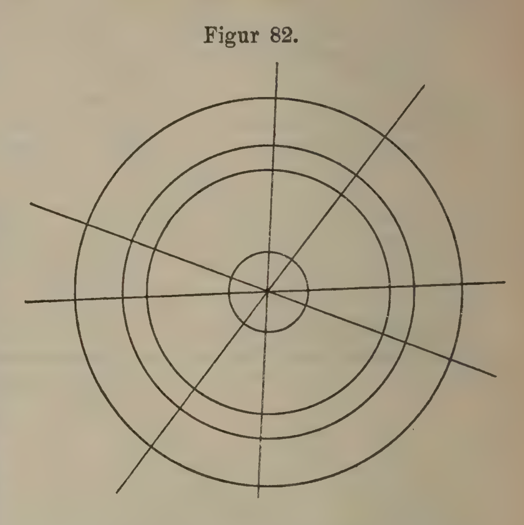
Erkl. 315. Im zweiten Falle obiger Antwort tritt bezüglich des Aehnlichkeitspunktes der entsprechenden Kreise die Eigenschaft der Figur 40 in Kraft, dass nämlich der äussere Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise, deren einer den andern einschliesst, im Innern beider Kreise liegt. Denkt man sich als Inversionskreis etwa den Kreis P_1, so ist zu unterscheiden zwischen denjenigen der Kreise P, welche die Achse CP auf derselben Seite von P_1 zweimal oder nur einmal schneiden, beide Gruppen getrennt durch den einzigen Kreis P, der durch den Mittelpunkt P_1 selbst hindurchgeht. Letzterer ist die reciproke Figur zur Geraden CM; von den übrigen beiden Gruppen kann man jede in zwei Abteilungen trennen, ob innerhalb oder ausserhalb des Kreises P_1 verlaufend. Dann geht innerhalb jeder Gruppe die eine Abteilung in die andere über, wobei die Trennung der Abteilungen für die erste Gruppe durch die Gerade CM, für die zweite Gruppe durch den Grundkreis P_1 gebildet wird.

Erkl. 316. Ueber einige bemerkenswerte Anwendungen des dritten Falles nebenstehender Antwort sehe man in der Aufgabensammlung am Schlusse dieses Teiles.

Erkl. 317. Im vierten Falle nebenstehender Antwort hängt die Richtung bezw. Lage der neuentstehenden Figur von der Wahl des Transformationsmittelpunktes, die Grösse der Figur von der Wahl des Grundkreises ab. Fällt der Punkt nach C, und wird $CA = CB$ Radius des Grundkreises, so erhält man die kongruente Figur im ganzen und einzelnen; liegt der Punkt sonst beliebig auf CM oder beliebig auf CP (ausserhalb A oder B), so entsteht auch die kongruente Figur, aber allgemein nur in der Gesamtheit aller Kreise; im besonderen nur, wenn die Auswahl der zu zeichnenden Kreise besonders berechnet ist. Bei jeder Lage des Punktes ausserhalb der Geraden CM und CP entsteht wieder ein vom gegebenen verschiedenes Kreisbüschel M' durch zwei feste Punkte $A'B'$ und das orthogonale Kreisbüschel P'.

den, also zu koncentrischen Kreisen um jenen gemeinsamen Schnittpunkt der Geraden: es entsteht Figur 82.

Figur 82.



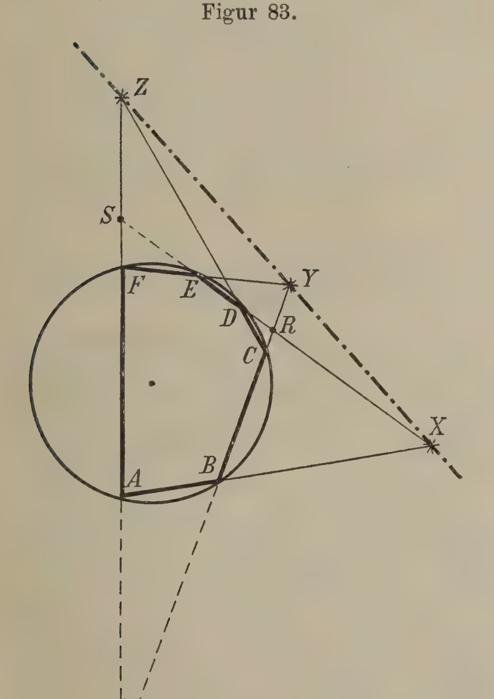
4) Wählt man einen beliebigen Punkt X der Ebene als Inversionscentrum, mit beliebigem Grundkreis, so werden durch denselben jedenfalls ein Kreis des Büschels M und ein Kreis des Büschels P möglich sein. Denkt man sich also zum Inversionscentrum gewählt z. B. den Punkt 13 in Figur 81, durch welchen die Kreise P_1 und M_3 hindurchgehen, so wird der Kreis M_3 zu einer Geraden m_3 durch die den Punkten A und B entsprechenden Punkte $A'B'$, die übrigen Kreise M zu Kreisen M' durch dieselben Punkte $A'B'$. Der Kreis P_1 dagegen wird zu einer Geraden p_1 senkrecht m_3, welche alle vorigen Kreise M' senkrecht trifft, also zur Mittelsenkrechten von $A'B'$; und alle Kreise P wieder zu Orthogonalkreisen der Kreise M', so dass wieder M' und P' orthogonale Büschel werden wie M und P. Man erhält also dieselbe Figur 81 nur in anderer Lage (bezw. Grösse).

c) Ueber die Sätze von Paskal und Brianchon.

Frage 99. Wie heisst der Satz des Paskal und wie wird derselbe bewiesen?

Erkl. 318. Der nebenstehende Satz ist benannt nach seinem Entdecker, dem französischen Mathematiker und Philosophen Blaise Pascal (1623—1662). Derselbe hatte 1640 im Alter von noch nicht 17 Jahren eine Schrift über Kegelschnitte verfasst und darin neben andern den nach ihm benannten Satz für den Kreis aufgestellt. Die Schrift selbst ist verloren gegangen; doch hat sich aus derselben für die Figur der sechs Geraden der Name „Hexagramma mysticum" bis heute erhalten.

Figur 83.



Erkl. 319. Statt das Dreieck RST aus den drei nicht aufeinanderfolgenden Seiten BC, DE, FA zu bilden, könnte man dasselbe auch bilden für die andern drei nicht aufeinanderfolgenden Seiten AB, CD, EF. Dann sind die drei andern nicht aufeinanderfolgenden Seiten des Sechsecks die Seiten BC, DE, FA; und in Bezug auf diese hat man dann den Satz des Menelaos für das Dreieck der vorigen anzuschreiben.

Antwort. Der Satz des Paskal lautet:

Satz 23. In jedem Sehnensechseck liegen die Schnittpunkte je zweier Gegenseiten auf einer Geraden.

Beweis I.

Ist $ABCDEF$ in Figur 83 das betrachtete Sehnensechseck, also AB und DE, BC und EF, CD und FA dessen Gegenseiten, welche sich bezüglich in X, Y, Z schneiden, so bilde man das Dreieck RST aus den drei nicht aufeinanderfolgenden Seiten BC, DE, FA und setze für dieses Dreieck den Satz des Menelaos an in Bezug auf jede der drei andern (nicht aufeinanderfolgenden) Seiten des Sechsecks:

$$AB \cdots RX \cdot SA \cdot TB = XS \cdot AT \cdot BR,$$
$$CD \cdots RD \cdot SZ \cdot TC = DS \cdot ZT \cdot CR,$$
$$EF \cdots RE \cdot SF \cdot TY = ES \cdot FT \cdot YR.$$

Multipliziert man die entstandenen drei Gleichungen, so entsteht:

$$RX \cdot (RD \cdot RE) \cdot SZ \cdot (SA \cdot SF) \cdot TY \cdot (TB \cdot TC)$$
$$= XS \cdot (DS \cdot ES) \cdot ZT \cdot (AT \cdot FT) \cdot YR \cdot (BR \cdot CR).$$

Nun gelten nach dem Sekantensatze für die beiderseits eingeklammert auftretenden Produkte die Beziehungen für die Punkte:

$$R \cdots RD \cdot RE = RB \cdot RC,$$
$$S \cdots SA \cdot SF = SD \cdot SE,$$
$$T \cdots TB \cdot TC = TA \cdot TF.$$

Folglich fallen die in Klammern stehenden Produkte beiderseits als paarweise gleiche Grössen fort und es bleibt:

$$RX \cdot SZ \cdot TY = XS \cdot ZT \cdot YR.$$

Es sind aber X, Z, Y äussere Teilpunkte der Dreiecksseiten RST, also liegen nach dem Umkehrungssatze des „Menelaos" die Punkte X, Y, Z auf einer Geraden.

Erkl. 320. Der Satz des Menelaos lautet nach Antwort der Frage 51 des VII. Teiles dieses Lehrbuches wie folgt:

Werden die drei Seitenlinien eines Dreiecks von einer beliebigen Geraden geschnitten, so sind die Produkte je dreier nicht aneinanderstossenden Seitenabschnitte gleichgross.

Beim dreimaligen Anschreiben des Satzes geht man im obenstehenden stets von derselben Ecke R aus, und zwar auf Seite RS zum Schnittpunkte der gewählten Geraden, von da nach S; dann auf Seite ST zum Schnittpunkte, von da nach T; endlich auf TR zum Schnittpunkte, und von da nach R.

Als Umkehrung des Satzes von Menelaos gilt der Satz (Antwort der Frage 53 des VII. Teiles):

Liegen auf den drei Seiten eines Dreiecks drei Teilpunkte (drei äussere, oder ein äusserer und zwei innere) derart, dass die Produkte je dreier nicht aneinanderstossenden Abschnitte gleichgross sind, so liegen die drei Teilpunkte auf einer Geraden.

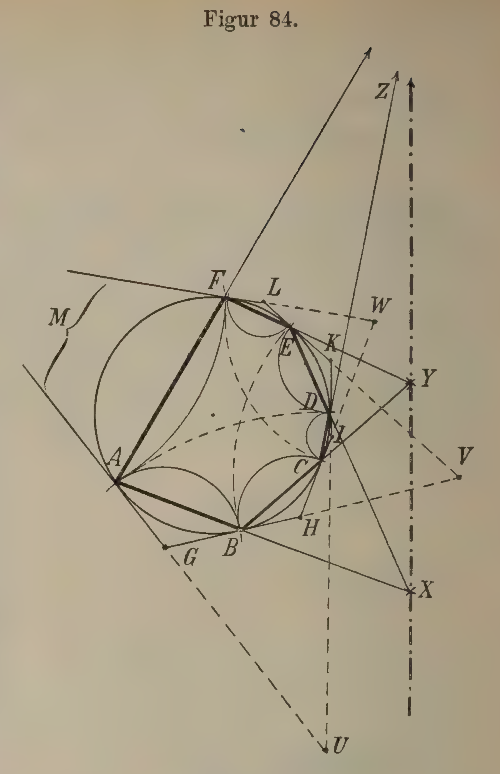
Erkl. 321. Da der Radius jedes der neun Kreise UVW, GH u. s. w. in Figur 84 eine Tangente des Hauptkreises ist, so ist deren Tangente im Berührungspunkte jeweils ein Radius des Hauptkreises; es haben also z. B. die drei Kreise G, M, U, deren Mittelpunkte auf derselben Tangente in A liegen, in A als gemeinsame Tangente den Radius des Hauptkreises, und deshalb müssen die drei Kreise einander in A berühren. Und zwar bilden die drei Kreispaare in jedem der Punkte $ABCDEF$ jeweils zwei Paare mit ausschliessender und ein Paar mit einschliessender Berührung.

Erkl. 322. Der hierher gehörige Inhalt des Satzes 8 bezw. 14b lässt sich folgendermassen aussprechen:

(Satz 8.) Werden zwei Kreise von einem dritten gleichartig (bezw. ungleichartig) berührt, so geht die Berührungssehne des dritten Kreises durch den äusseren (bezw. inneren) Aehnlichkeitspunkt der zwei ersten Kreise.

(Satz 14b). Werden zwei Kreise von einem dritten rechtwinklig geschnitten, so gehen von den Verbindungsgeraden der beiderseitigen Schnittpunkte auf den zwei ersten Kreisen zwei durch den äusseren und zwei durch den inneren Aehnlichkeitspunkt dieser beiden Kreise.

Figur 84.



Beweis II.

Zieht man in den Eckpunkten des Sehnensechsecks $ABCDEF$ die Tangenten und bezeichnet mit $GHIKLM$ deren aufeinanderfolgende Schnittpunkte, mit UVW die Schnittpunkte der in gegenüberliegenden Eckpunkten A und D, B und E, C und F gezogenen Tangenten, so lässt sich um jeden dieser neun Tangentenschnittpunkte ein Kreis ziehen mit der zugehörigen Tangentenstrecke als Radius. Ein Vergleich mit Figur 80 zeigt, dass diese neun Kreise sämtlich Orthogonalkreise des Hauptkreises sind, dass also in jedem der sechs Kreispunkte $ABCDEF$ je drei dieser Kreise einander berühren. Es treten daher jedesmal die Sätze 8 bezw. 14b in Giltigkeit, und man findet für die Kreise mit gegenüberliegenden Sehnen:

1. { Kreis G (Sehne AB) berührt ungleichartig die Kreise U und V,
also geht AB durch den inneren Aehnlichkeitspunkt der Kreise U und V;
Kreis K (Sehne DE) berührt ungleichartig die Kreise U und V,
also geht DE durch den inneren Aehnlichkeitspunkt der Kreise U und V;

2. Kreis H (Sehne BC) berührt ungleichartig die Kreise V und W,
also geht BC durch den inneren Aehnlichkeitspunkt der Kreise V und W;
Kreis L (Sehne EF) berührt ungleichartig die Kreise V und W,
also geht EF durch den inneren Aehnlichkeitspunkt der Kreise V und W;

3. Kreis I (Sehne CD) berührt gleichartig die Kreise W und U,
also geht CD durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt der Kreise W und U;
Kreis M (Sehne FA) berührt gleichartig die Kreise W und U,
also geht FA durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt der Kreise W und U.

Da nun aber AB und DE nur den Punkt X, BC und EF nur den Punkt Y, CD und AF nur den Punkt Z gemeinsam haben, so muss:

X der innere Aehnlichkeitspunkt der Kreise U und V,

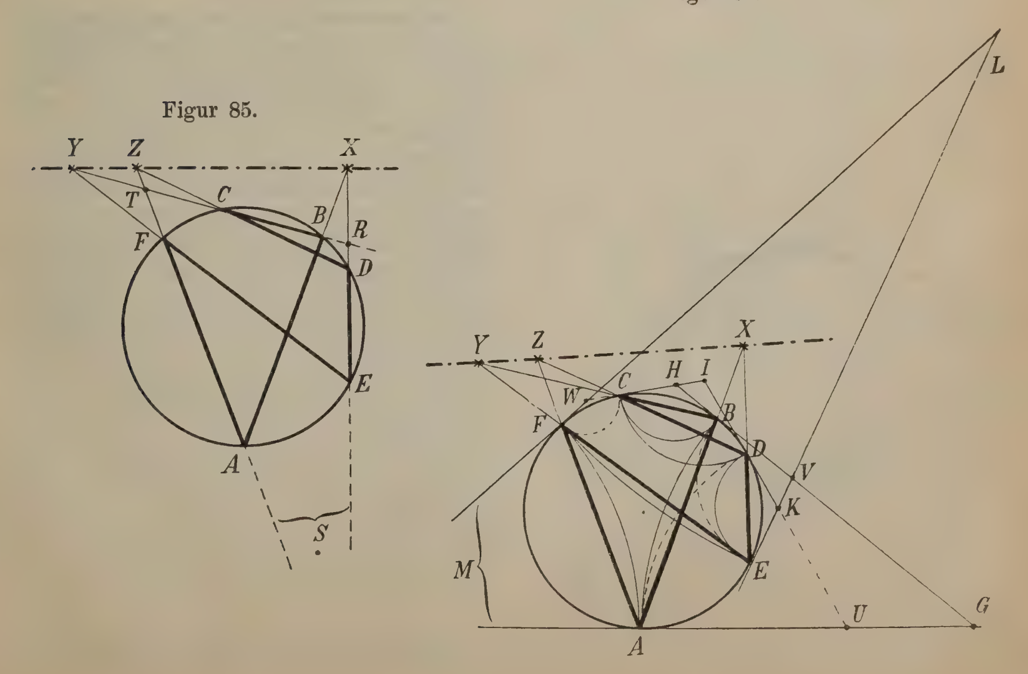
Y der innere Aehnlichkeitspunkt der Kreise V und W,

Z der äussere Aehnlichkeitspunkt der Kreise W und U sein.

Nunmehr tritt endlich der Satz von Monge in Kraft (Satz 9), wonach je zwei innere Aehnlichkeitspunkte dreier Kreise mit dem dritten äusseren Aehnlichkeitspunkte auf einer Geraden liegen müssen, und somit liegen die Punkte X, Y, Z in einer geraden Linie.

Erkl. 323. Es ist bemerkenswert, dass in keiner der beiden nebenstehenden Beweisführungen der Mittelpunkt des Hauptkreises selbst oder mit seinen Eigenschaften in Verwendung tritt. Daher erklärt es sich, dass der so bewiesene Satz des Paskal eine besonders wichtige Rolle spielt in der Geometrie der Lage, und dass seine Giltigkeit sich auch wörtlich erstreckt auf die Kegelschnitte: Ellipse, Hyperbel und Parabel. Eben damit hängt es auch zusammen, dass der Satz nicht nur für das konvexe Sehnensechseck der Figuren 83 bezw. 84, sondern auch für jedes überschlagene u. s. w. Sehnensechseck gilt. Denn beide Beweisführungen erfahren dabei keinerlei wesentliche Veränderung (siehe Figur 85 und 86).

Erkl. 324. In Figur 85 und 86 sind genau dieselben sechs Punkte desselben Kreises ver-



Figur 85.

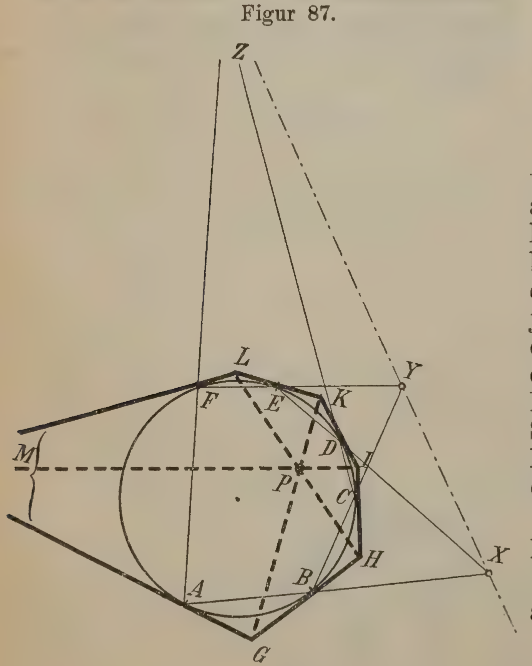
Figur 86.

wendet wie in Figur 83 und 84, nur in anderer Reihenfolge und daher mit anderer Buchstabenbezeichnung. Die neuen Buchstaben sind aber so gewählt, dass die beiden Beweisführungen I und II genau gleicher Weise beibehalten werden. Man versäume daher nicht, die beiden Fälle nochmals nach Figur 85 bezw. 86 durchzugehen. Während Beweis I wörtlich bestehen bleibt, ist in Beweis II eine kleine Aenderung wegen der veränderten Lage der Kreise anzubringen: die Kreise G und K berühren nämlich gleichartig die Kreise U und V, so dass AB und ED in X den äusseren Aehnlichkeitspunkt der Kreise U und V liefern; Kreise H und L berühren ebenfalls gleichartig die Kreise V und W, so dass BC und EF in Y den äusseren Aehnlichkeitspunkt der Kreise V und W liefern; Kreise I und M berühren gleichartig die Kreise W und U, so dass CD und FA in Z den äusseren Aehnlichkeitspunkt der Kreise V und W liefern. Nun liegen XYZ als äussere Aehnlichkeitspunkte dreier Kreise auf derselben Geraden.

Erkl. 325. In den Figuren 85 und 86 sind von den Figuren 83 und 84 alle Seiten geändert bis auf AF, deshalb hat man auch drei von jenen verschiedene Punkte XYZ. Solcher verschiedenen Zusammenstellungen des Sechsecks gibt es aber nach Antwort der Frage 6 und Aufgabe 4 des III. Teiles dieses Lehrbuches im ganzen 60. Werden daher irgend zwei Gegenseiten beibehalten (und das ist viermal möglich), so ist auch unter den neuen Punkten XYZ einer mit dem einen vorigen identisch und von den 60 „Paskalschen Geraden" gehen dann vier durch denselben Punkt. — Nicht unerwähnt möge es auch bleiben, dass, weil X, Y, Z Aehnlichkeitspunkte der Kreise UV, VW, WU sind, jeder Aehnlichkeitspunkt auf der Centralen seiner Kreise liegen muss, dass also in Figur 84 und 86 jeweils die Punkte XUV, YVW, ZWU auf einer Geraden liegen müssen. Ueber die Möglichkeit, dass neben XYZ auch UVW auf einer Geraden liegen (und zwar dann beide Punktgruppen auf derselben Geraden) sehe man Aufgabe 157.

Frage 100. Wie heisst der Satz des Brianchon, und wie wird derselbe bewiesen?

Figur 87.



Antwort. Der Satz des Brianchon lautet:

Satz 24. In jedem Tangentensechseck gehen die Verbindungsgeraden je zweier Gegenecken durch einen Punkt.

Der Beweis geschieht durch die Anwendung der Lehre von Pol und Polare auf den Satz des Paskal. Ist nämlich in Figur 87 $GHIKLM$ das zu betrachtende Tangentensechseck, so bilden dessen Berührungspunkte $ABCDEF$ jedenfalls ein Paskalsches Sehnensechseck, bei welchem die Schnittpunkte XYZ der Gegenseiten auf einer Geraden liegen. Nun ist nach Satz 17 jede Seite des Sehnensechsecks die Polare des zugehörigen Eckpunktes des Tangentensechsecks, nämlich:

Sehne AB, BC, CD, DE, EF, FA
Polare zum
Punkt G, H, I, K, L, M
als Pol.

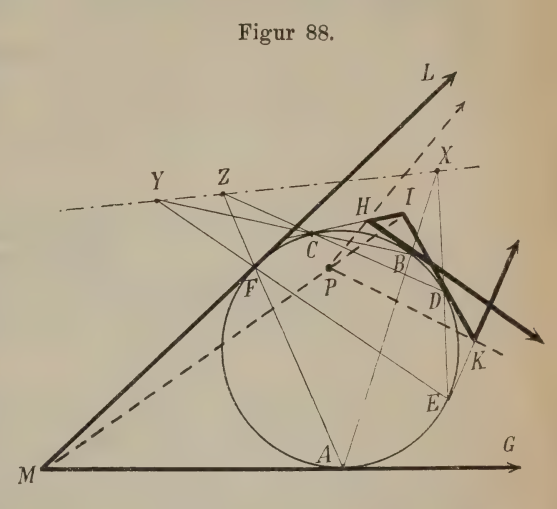
Da nun:

AB und DE als Polaren von G und K einander schneiden in X,
BC „ EF „ „ „ H „ L „ „ „ Y,
CD „ FA „ „ „ I „ M „ „ „ Z;

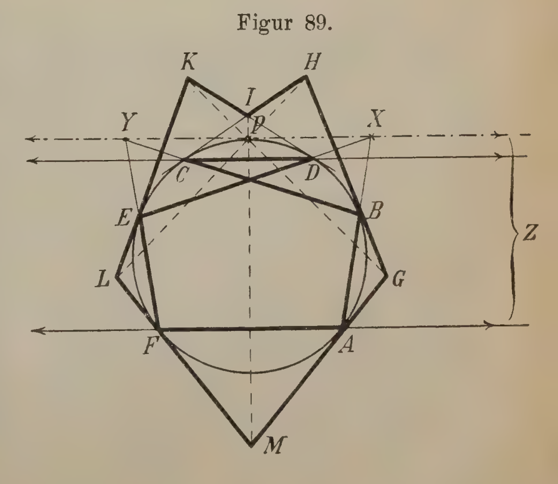
so müssen nach Satz 19 die Punkte:

G und K als Pole von AB und DE liegen auf der Polaren von X,
H „ L „ „ „ BC „ EF „ „ „ „ „ Y,
I „ M „ „ „ CD „ FA „ „ „ „ „ Z.

Demnach sind GK, HL, IM die Polaren von X, Y, Z; und folglich erfordert die gemeinsame Verbindungsgerade der Punkte XYZ als Pol auch einen gemeinsamen Schnittpunkt der Polaren GK, HL, IM; d. h. diese drei Geraden gehen durch einen Punkt P, den Pol der Geraden XYZ.



Figur 88.



Figur 89.

Erkl. 326. Der nebenstehende Satz ist benannt nach seinem Entdecker, dem englischen Mathematiker Brianchon; derselbe fand den Satz im Jahre 1806 auf dieselbe Weise, wie nebenstehende Beweisführung angibt. Es liegen also 166 Jahre zwischen den Entdeckungen der beiden einander so deutlich entsprechenden Sätze von Paskal und Brianchon. Das ist aber dadurch wohl zu erklären, dass erst im Jahre 1799 von dem französischen Mathematiker Carnot die Beziehungen von Pol und Polare entdeckt, und dadurch das Verständnis für jenes „Entsprechen" von Sätzen geweckt wurde. Alsbald fand dann das „Princip der Polarisation" als mächtiges Hilfsmittel zur Auffindung neuer Sätze vielfache Anwendung; und da Brianchon den Satz des Paskal als einen solchen erkannte, der von den Massbeziehungen unabhängig ist, so hatte er damit den Weg zur Entdeckung seines Satzes gefunden.

Erkl. 327. Unter Benützung trigonometrischer Beziehungen (dass nämlich in Figur 87 z. B. für das Dreieck GIL, wenn GK, IM, LH durch einen Punkt gehen, die dem planimetrischen Satze des Ceva analoge Beziehung besteht:

$$\sin LGK \cdot \sin GIM \cdot \sin ILH = \sin KGI \cdot \sin MIL \cdot \sin HLG;$$

und dass umgekehrt GK, IM, LH durch einen Punkt gehen, wenn obige Beziehung besteht) lässt sich auch ein unmittelbarer Beweis des Satzes von Brianchon erbringen, ohne dass der Satz von Paskal zu Grunde gelegt wird.

Erkl. 328. Ebenso wie der Satz des Paskal für jegliches durch beliebige Verbindung der sechs Kreispunkte entstehende Sehnensechseck gilt, muss auch der Satz des Brianchon für jegliches durch beliebige Schneidung der sechs Kreistangenten entstehende Tangentensechseck Geltung haben. So sind in Figur 88 die Tangenten in derjenigen Reihenfolge benützt, wie die Berührungspunkte in den Figuren 85 und 86 gewählt waren. Es entsteht das mehrfach überschlagene Sechseck $GHIKLM$, für welches wieder die Verbindungsgeraden der Gegenecken GK, HL, IM durch einen Punkt P gehen, den Pol der Geraden XYZ. Jede Abänderung der Reihenfolge der Tangenten liefert andere Gegenecken, und einen andern „Brianchonschen Punkt" P. So oft aber bei der Abänderung ein Paar Gegenecken beibehalten sind, bleibt auch die Verbindungsgerade gleich, und von den neuen Punkten P liegen ebenfalls vier auf derselben Geraden.

Erkl. 329. Ist das Paskalsche und damit auch das Brianchonsche Sechseck ein kon-

vexes, so liegen sicher alle drei Punkte XYZ und damit auch die Paskalsche Gerade ausserhalb des Kreises, der Brianchonsche Punkt innerhalb des Kreises. Bei den andern Anordnungen der Aufeinanderfolge ist dies durchaus nicht immer der Fall, vielmehr kann dann die Gerade XYZ auch den Kreis schneiden, der Punkt P ausserhalb des Kreises fallen; in besonderen Fällen, welche durch passende Wahl der Stücke (in Figur 89 geschieht dies durch Symmetrie) herbeigeführt werden können, ist auch wohl P ein Kurvenpunkt, also die Gerade XYZ als dessen Polare eine Tangente des Kreises.

Frage 101. Welche Ergebnisse liefern die Sätze von Paskal und Brianchon fürs Fünfeck?

Figur 90.

Z, Y, K, E(FL), D, I, X, M, P, C, H, B, A, G

Antwort.

Lässt man einen Eckpunkt des Sehnensechsecks (z. B. F in Fig. 83) längs dem Kreise fortrücken bis zum Zusammenfallen mit dem nächstfolgenden Eckpunkte E, so wird die Verbindungsgerade FE sich um den Punkt E drehen und sich immer mehr der Lage der Tangente im Punkte E nähern; und wenn die Punkte F und E zusammenfallen, muss die vorherige Seite FE des Sehnensechsecks mit der Tangente im Punkte E zusammenfallen (Fig. 90). Da hierbei die Punkte $ABCDE$ fest liegen bleiben, so bleiben auch die Geraden AB und DE samt deren Schnittpunkt X fest liegen, und die Gerade XYZ dreht sich bei obiger Bewegung um den Punkt X,

Lässt man eine Seite des Tangentensechsecks (z. B. LM in Figur 87) längs dem Kreise fortrücken bis zum Zusammenfallen mit der nächstfolgenden Tangente KL, so wird der Schnittpunkt L sich auf der Geraden KL verschieben und sich immer mehr dem Berührungspunkte der Tangente KL nähern; und wenn die Tangenten ML und LK zusammenfallen, muss der vorherige Eckpunkt L des Tangentensechsecks mit dem Berührungspunkte E zusammenfallen (Figur 90). Da hierbei die Tangenten MG, GH, HI, IK, KL fest liegen bleiben, so bleiben auch die Schnittpunkte G und K samt deren Verbindungsgeraden GK fest liegen, und der Punkt P verschiebt

wobei immer die Punkte Y und Z mit X auf einer Geraden liegen bleiben. Da letzteres auch bei unmittelbarer Annäherung der Punkte E und F der Fall sein muss, so muss auch der Schnittpunkt Y' der an Stelle der Seite EF tretenden Tangente in E mit der Gegenseite BC auf einer Geraden liegen mit den beiden Schnittpunkten X bezw. Z der übrigen Gegenseiten AB und DE bezw. CD und AF. Man erhält also:

Satz 23a. In jedem Sehnenfünfeck liegt der Schnittpunkt einer Seite mit der Tangente in der Gegenecke und die Schnittpunkte der beiden übrigen Paare von Gegenseiten auf einer Geraden.

sich bei obiger Bewegung auf der Geraden GK, wobei immer die Verbindungsgeraden HL und IM mit GK durch einen Punkt gehend bleiben. Da letzteres auch bei unmittelbarer Annäherung der Tangenten ML und LK der Fall sein muss, so muss auch die Verbindungsgerade HE des an Stelle des Eckpunktes L tretenden Eckpunktes E mit der Gegenecke H durch einen Punkt gehen mit den beiden Verbindungsgeraden GK bezw. IM der übrigen Gegenecken G und K bezw. I und M. Man erhält also:

Satz 24a. In jedem Tangentenfünfeck geht die Verbindungsgerade einer Ecke mit dem Berührungspunkt der Gegenseite und die Verbindungsgeraden der beiden übrigen Paare von Gegenecken durch einen Punkt.

Erkl. 330. In obenstehender Antwort und in Figur 90 sind die Ergebnisse der Sätze von Paskal und Brianchon in dualistischer Nebeneinanderstellung aufgeführt, so dass gegenseitiges Entsprechen der beiden Teile ganz wörtlich zu erkennen ist. Im Text entsprechen sich nämlich stets Eckpunkte und Seiten, Schnittpunkte und Verbindungsgeraden u. s. w. (s. das erste Kapitel des III. Teiles dieses Lehrbuches). In der Figur 90 ist der Satz 23a dargestellt am Sehnenfünfeck $ABCDE$ mit den Punkten XYZ auf einer Paskalschen Geraden; der Satz 24a am Tangentenfünfeck $GHIKM$ mit den Verbindungsgeraden GK, HL, IM durch den Brianchonschen Punkt P.

Erkl. 331. Führt man die Bewegung des sechsten Punktes bezw. der sechsten Tangente längs dem Kreise noch weiter fort, so entsteht aus dem vorher konvexen Sechseck erst das Fünfeck und dann wieder (da Punkt E am Platze bleibt) ein Sechseck, aber ein überschlagenes. Und dadurch lässt sich für die in den Erkl. 323 und 328 bezw. in den Figuren 85, 86 und 88, 89 angegebene Giltigkeit der Sechseck-Sätze von Paskal und Brianchon ein neuer Beweis erbringen. — Ebenso lässt sich der Beweis erbringen, dass die obenstehenden Sätze 23a und 24a nicht nur für konvexe, sondern auch für überschlagene Fünfecke Geltung haben.

Erkl. 332. Während beim Fünfeck jede Seite eine Gegenecke und jede Ecke eine Gegenseite hat, bleiben nach Vorausnahme einer Seite noch vier Seiten und nach Vorausnahme einer Ecke noch vier Ecken. Unter diesen übrigbleibenden Elementen hat dann wieder jede Seite eine Gegenseite und jede Ecke eine Gegenecke. Ueber die vielfachen Anwendungen der Sätze von Paskal und Brianchon zur Ausführung von Konstruktionen am Kreis ohne Zirkel mit Benützung bloss des Lineals sehe man die Aufgabe 158 am Schlusse dieses Teiles.

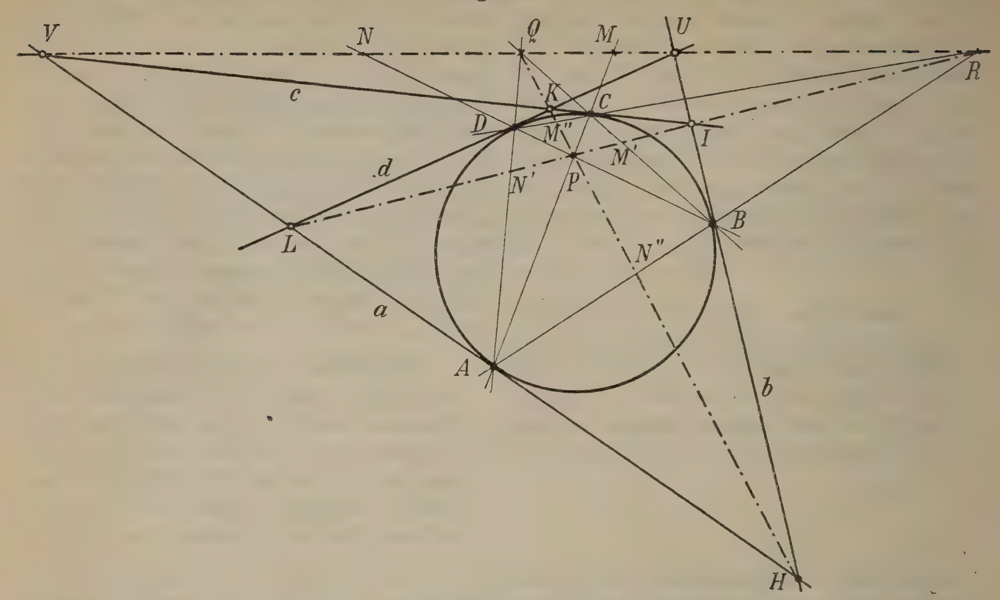
Frage 102. Welches Ergebnis liefert die Weiterführung der vorigen Betrachtungsweise fürs Viereck?

Antwort.

Lässt man nicht nur einmal, sondern zweimal eine Ecke des Paskalschen Sechsecks durch Fortrücken längs dem Kreise mit einer benachbarten Ecke zusammenfallen, so entsteht aus dem Sehnensechseck ein Sehnenviereck, bei welchem in zwei Ecken die

Lässt man nicht nur einmal, sondern zweimal eine Seite des Brianchonschen Sechsecks durch Fortrücken längs dem Kreise mit einer benachbarten Seite zusammenfallen, so entsteht aus dem Tangentensechseck ein Tangentenviereck, bei welchem auf zwei Seiten die

Figur 91.



Tangenten als fünfte bezw. sechste Seite mitzuzählen sind. Dabei ist zu unterscheiden, ob diese zwei Ecken Gegenecken oder Nachbarecken des Sehnenvierecks geworden sind.

I) Hat man ein Sehnenviereck mit Tangenten in zwei Gegenecken, so haben die Tangenten dieser zwei Gegenecken als ein Paar Gegenseiten des Paskalschen Sechsecks zu gelten, und jedes Paar Gegenseiten des Sehnenvierecks als weiteres Paar Gegenseiten des Sechsecks. Bringt man die beiden letzteren zum Schnitt, so muss nach Satz 23 auf der Verbindungsgeraden ihrer Schnittpunkte auch der Schnittpunkt jener Tangenten in Gegenecken liegen.

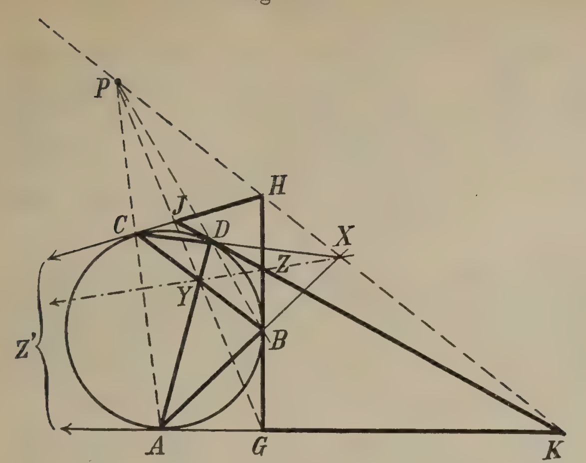
Denkt man sich nun aber das Sehnenviereck auf die andere Art zum Sechseck vervollständigt, dass man die Tangenten in den beiden andern Gegenecken als fünfte und sechste Seite hinzunimmt, so sind die Tangenten dieser zwei Gegenecken als ein Paar Gegenseiten des Sechsecks und wieder die Gegenseiten des Vierecks als weitere Paare von Gegenseiten des Sechsecks zu zählen. Bringt man letztere wieder

Berührungspunkte als fünfte bezw. sechste Ecke mitzuzählen sind. Dabei ist zu unterscheiden, ob diese zwei Seiten Gegenseiten oder Nachbarseiten des Tangentenvierecks geworden sind.

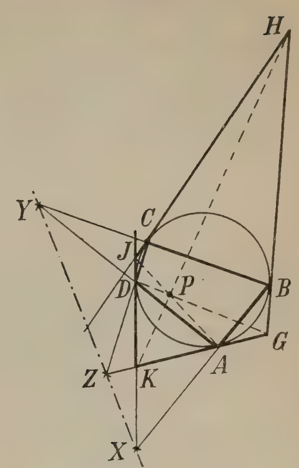
I) Hat man ein Tangentenviereck mit Berührungspunkten auf zwei Gegenseiten, so haben die Berührungspunkte dieser zwei Gegenseiten als ein Paar Gegenecken des Brianchonschen Sechsecks zu gelten und jedes Paar Gegenecken des Tangentenvierecks als weiteres Paar Gegenecken des Sechsecks. Bringt man die beiden letzteren zur Verbindung, so muss nach Satz 24 durch den Schnittpunkt ihrer Verbindungsgeraden auch die Verbindungsgerade jener Berührungspunkte auf Gegenseiten gehen.

Denkt man sich nun aber das Tangentenviereck auf die andere Art zum Sechseck vervollständigt, dass man die Berührungspunkte auf den beiden andern Gegenseiten als fünfte und sechste Ecke hinzunimmt, so sind die Berührungspunkte dieser zwei Gegenseiten als ein Paar von Gegenecken des Sechsecks und wieder die Gegenecken des Vierecks als weitere Paare von Gegenecken des Sechsecks zu zählen. Bringt man letztere wieder

Figur 92.



Figur 93.



zum Schnitt, so erhält man dieselbe Verbindungsgerade wie zuvor, also muss auf derselben Verbindungsgeraden nicht nur der Schnittpunkt des ersten, sondern auch der Schnittpunkt dieses zweiten Paares von Tangenten in Gegenecken liegen. Man erhält also (vergl. Satz 21b):

Satz 23b. In jedem Sehnenviereck liegen die Schnittpunkte der Gegenseiten und die Schnittpunkte der Tangenten in Gegenecken alle vier auf einer Geraden (Figur 91 und 92).

II) Hat man ein Sehnenviereck $ABCD$ mit Tangenten in zwei Nachbarecken (A und D in Figur 93), so sind die sechs Seiten des Sehnensechsecks der Reihe nach AB, BC, CD, Tangente in D, DA, Tangente in A; also Gegenseiten desselben: AB und Tangente in D, BC und AD, CD und Tangente in A. Und deren Schnittpunkte liegen nach Satz 23 auf einer Geraden XYZ.

Vervollständigt man das Viereck $ABCD$ durch die Tangenten in den beiden andern Nachbarecken B und C, so werden die Gegenseiten des Sehnensechsecks: AB und Tangente in C, BC und AD, CD und Tangente in B. Und deren Schnittpunkte liegen wieder auf einer Geraden; dieselbe hat aber mit der vorigen nur den Punkt Y gemeinsam. Man erhält also:

zur Verbindung, so erhält man denselben Schnittpunkt wie zuvor, also muss durch denselben Schnittpunkt nicht nur die Verbindungsgerade des ersten, sondern auch die Verbindungsgerade dieses zweiten Paares von Berührungspunkten auf Gegenseiten hindurchgehen. Man erhält also (vergl. Satz 21c):

Satz 24b. In jedem Tangentenviereck gehen die Verbindungsgeraden der Gegenecken und die Verbindungsgeraden der Berührungspunkte auf Gegenseiten alle vier durch einen Punkt (Figur 91 und 92).

II) Hat man ein Tangentenviereck $GHIK$ mit Berührungspunkten auf zwei Nachbarseiten (KI und KG in Fig. 93), so sind die sechs Ecken des Tangentensechsecks der Reihe nach G, H, I, Berührungspunkt auf IK, K, Berührungspunkt auf KG; also Gegenecken desselben: G und Berührungspunkt auf IK, H und K, I und Berührungspunkt auf KG. Und deren Verbindungsgeraden gehen nach Satz 24 durch einen Punkt P.

Vervollständigt man das Viereck $GHIK$ durch die Berührungspunkte auf den beiden Nachbarseiten GH, HI, so werden die Gegenecken des Tangentensechsecks G und Berührungspunkt auf HI, H und K, I und Berührungspunkt HG. Und deren Verbindungsgeraden gehen wieder durch einen Punkt; derselbe hat aber

Satz 23c. In jedem Sehnenviereck liegt der Schnittpunkt zweier Gegenseiten und die Schnittpunkte der andern Seiten mit den Tangenten in den Eckpunkten auf einer der vorigen Seiten auf einer Geraden.

mit dem vorigen nur die Gerade HK gemeinsam. Man erhält also:

Satz 24c. In jedem Tangentenviereck geht die Verbindungsgerade zweier Gegenecken und die Verbindungsgeraden der andern Ecken mit den Berührungspunkten auf den Seiten durch eine der vorigen Ecken durch einen Punkt.

Erkl. 333. Unter den vorstehend abgeleiteten Sätzen 23a, c und 24a, c sind die beiden ersten Sätze 23b und 24b die wichtigsten aller Folgerungen aus den Sätzen von Paskal und Brianchon. Dieselben treten schon als Folgerungen der Polaritätseigenschaften auf als Sätze 21b und c an der mit Figur 91 identischen Figur 75, finden aber hier nochmals eine völlig selbständige Ableitung. Von allen übrigen Sätzen nach Paskal und Brianchon unterscheiden sie sich sehr wichtig dadurch, dass hier nicht nur drei, sondern sogar vier Elemente vereinigt liegen, nämlich vier Punkte auf einer Geraden bezw. vier Gerade durch einen Punkt.

Erkl. 334. Während Figur 91 besonders für das konvexe Viereck $ABCD$ bezw. $HIKL$ zu gelten hat (man erkennt daran aber auch alle Verhältnisse für die Vierecke $ABDCA$ bezw. $VHUKV$ und $ACBDA$ bezw. $VLUIV$), so zeigt Figur 92 nochmals besonders die Beziehungen eines überschlagenen eingeschriebenen Sehnenvierecks $ABCD$ und eines überschlagenen angeschriebenen Tangentenvierecks $GHIK$. Fürs erstere liegen auf einer Paskalschen Geraden die Punkte $XYZZ'$, fürs letztere gehen durch einen Punkt P die Verbindungsgeraden AC, BD, GI, KH. (Dabei ist das Viereck ein allgemeines nach Figur 91, da nicht, wie in Figur 76 die Gerade BC durch K und AD durch H geht.)

Erkl. 335. Die Sätze 23c und 24c sind nicht besonders bemerkenswert als Sätze von weittragender Bedeutung, während die vorhergehenden geradezu grundlegende Bedeutung besitzen. (In der Geometrie der Lage wird auf ihnen die ganze Polarentheorie aufgebaut.) Dagegen dienen die Sätze 23c und 24c zu Konstruktionsaufgaben auch in solchen Fällen, wo die an sich wichtigeren Sätze 23b und 24b nicht mehr zum Ziele führen.

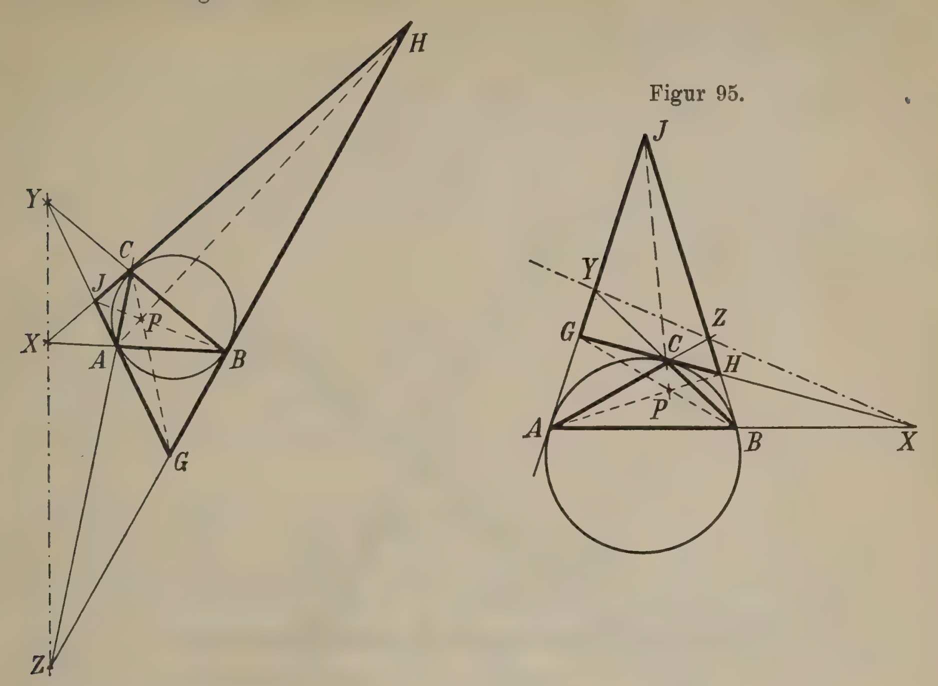
Erkl. 336. Man kann aus dem Sechseck auch zum Viereck kommen, indem man mit einem Element die beiden benachbarten zur Vereinigung bringt, so dass in diesem einen Elemente drei Elemente zusammenfallen und nur die drei übrigen einzeln bleiben. Das würde aber nur zu den höchst selbstverständlichen Ergebnissen führen, dass eine Tangente durch ihren Berührungspunkt geht, oder ein Berührungspunkt auf seiner Tangente liegt.

Frage 103. Welche Folgerungen liefern die Sätze von Paskal und Brianchon fürs Dreieck?

Antwort.

Lässt man dreimal je eine Ecke des Paskalschen Sehnensechsecks durch Fortrücken längs dem Kreise mit einer andern benachbarten Ecke zusammenfallen, so entsteht aus dem Sehnensechseck ein Sehnendreieck, bei welchem in jeder Ecke die Tangente als vierte, fünfte und sechste Seite des Sehnensechsecks mitzuzählen ist. Als Gegenseiten sind dabei anzusehen je eine Seite des Dreiecks und die Tangente im gegenüberliegenden Eckpunkte: und die so entstehenden drei Schnittpunkte müssen nach Satz 23 auf einer Geraden liegen. Man erhält also:

Lässt man dreimal je eine Seite des Brianchonschen Tangentensechsecks durch Fortrücken längs dem Kreise mit einer andern benachbarten Tangente zusammenfallen, so entsteht aus dem Tangentensechseck ein Tangentendreieck, bei welchem auf jeder Seite der Berührungspunkt als vierter, fünfter, sechster Eckpunkt des Tangentensechsecks mitzuzählen ist. Als Gegenecken sind dabei anzusehen je ein Eckpunkt des Dreiecks und der Berührungspunkt der gegenüberliegenden Seite: und die so entstehenden drei Verbindungsgeraden müssen nach Satz 24



Figur 94. Figur 95.

Satz 23d. In jedem Sehnendreieck liegen die drei Schnittpunkte je einer Seite mit der Tangente in der Gegenecke auf einer Geraden.

durch einen Punkt gehen. Man erhält also:

Satz 24d. In jedem Tangentendreieck gehen die drei Verbindungsgeraden je einer Ecke mit dem Berührungspunkte auf der Gegenseite durch einen Punkt.

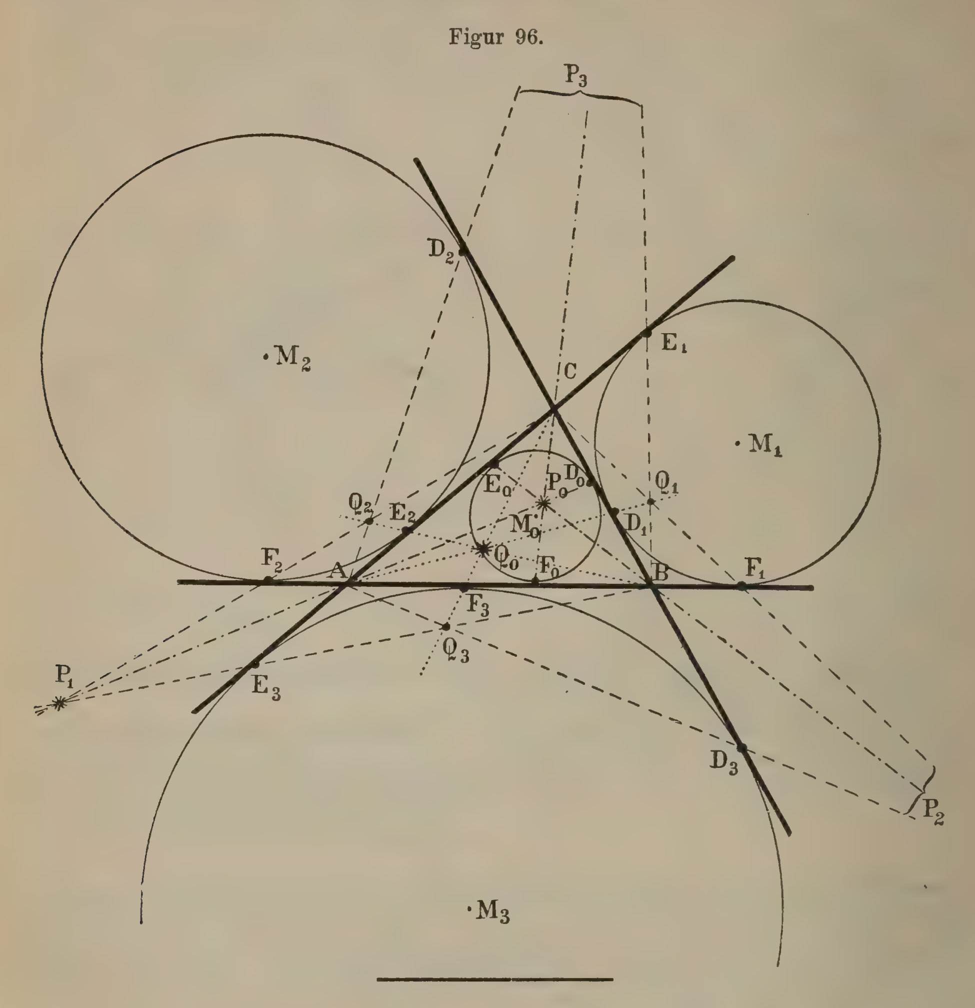
Erkl. 337. In Figur 94 ist für ein umgeschriebenes, in Figur 95 für ein angeschriebenes Tangentendreieck die Giltigkeit des Satzes 24d gezeigt; Satz 23d bleibt in beiden Fällen gleich. Die Gerade XYZ liegt stets ausserhalb des Kreises. Eine andere Ueberführung der Elemente des Sechsecks zum Dreieck, als dass jedes Element mit einem andern benachbarten zusammenfällt, würde ebensowenig zu einem Ergebnis führen, wie solches in der vorigen Erkl. 336 übers Viereck gezeigt wurde.

Erkl. 338. Da jedem Dreieck ein durch seine Ecken gehender Kreis umgeschrieben werden kann, so kann man den obenstehenden Satz 23d auch folgendermassen aussprechen: Zieht man in einem beliebigen Dreieck den Umkreis und dessen Tangenten in den Eckpunkten des Dreiecks, so liegen die drei Schnittpunkte je einer Tangente mit der Gegenseite auf einer Geraden.

Erkl. 339. Da jedem Dreieck ein seine Seiten berührender Inkreis und drei seine Seiten berührende Ankreise zugehören, so gilt Satz 24d für jedes Dreieck in vierfacher Weise, nämlich in Bezug auf jeden dieser vier Kreise für einen andern Punkt P. In der That ist diese Eigenschaft auch schon früher gefunden worden, sogar noch in verallgemeinerter Weise, nämlich für acht Punkte der genannten Art. Es gehen nämlich nach Satz 27 des VII. Teiles dieses Lehrbuches folgende 12 Ecktransversalen eines Dreiecks zu je drei durch einen von acht Punkten: 1) nach den drei Berührungspunkten des Inkreises, 2) bis 4) nach den drei Berührungspunkten eines jeden der drei Ankreise, 5) bis 7) nach den Berührungspunkten einer Seite mit dem Inkreise und denen der beiden andern Seiten mit den zwei Ankreisen auf gleicher Seite des ersteren, 8) nach den Berührungspunkten der drei Ankreise mit der jeweiligen Gegenseite. Man vergleiche Figur 96 und die zugehörigen Zeichenerklärung in Erkl. 190 des VII. Teiles

dieses Lehrbuches. Die vier ersten Beziehungen sind identisch mit der Aussage des Satzes 24d; die vier andern folgen beim Beweise durch den Satz des Ceva als selbstverständliche Folge (vergl. Aufgabe 146 des VII. Teiles dieses Lehrbuches).

Figur 96.



d) Ueber die Berührungsprobleme des Apollonius und des Malfatti.

Frage 104. Was versteht man unter dem Apollonischen Problem?

Erkl. 340. Das nebenstehende Problem ist benannt nach dem griechischen Mathematiker Apollonius von Pergae (geb. 270 v. Chr.). Da dieses Berührungsproblem in einem besonderen Lehrbuche dieser Encyklopädie ausführlich behandelt wird (Cranz, das Apollonische Berührungsproblem nebst verwandten Aufgaben), so sind im folgenden nur die allernotwendigsten Angaben über dieses Problem mitgeteilt, und

Antwort. Unter dem Problem des Apollonius, auch geradezu Kreisberührungsproblem genannt, versteht man die Aufgabe, einen Kreis zu konstruieren, welcher irgend drei der gegebenen Elemente Punkt, Gerade, Kreis berührt.

Man erhält also die folgenden zehn Einzelgruppen der zu berührenden gegebenen Elemente.

mag der Studierende im übrigen auf das genannte Werk verwiesen sein.

Erkl. 341. Der kürzeren Ausdrucksweise wegen ist nebenstehend vom Kreise gesagt, dass er „Punkte berühre“, während sonst wohl gesagt wird, ein Kreis berührt Gerade und Kreise, aber er „geht durch Punkte“. — Die Zahl der Aufgaben ist die Anzahl von Zusammenstellungen (Kombinationszahl) von drei Elementen zur dritten Klasse mit Wiederholungen, also:

$$\frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10.$$

Unter den 10 Aufgaben ist die letzte die wichtigste, indem sie alle neun vorigen als Einzelfälle umfasst; denn man kann einen Punkt bezw. eine Gerade ansehen als einen Kreis mit unendlich kleinem bezw. unendlich grossem Radius. Daher wird auch diese letzte Aufgabe oft kurzweg als Apollonische Aufgabe behandelt.

1) $P_1 P_2 P_3$: drei Punkte;
2) $P_1 P_2 g$: zwei Punkte und eine Gerade;
3) $P_1 P_2 k$: zwei Punkte und ein Kreis;
4) $P g_1 g_2$: ein Punkt und zwei Gerade;
5) $P g k$: ein Punkt, eine Gerade und ein Kreis;
6) $P k_1 k_2$: ein Punkt und zwei Kreise;
7) $g_1 g_2 g_3$: drei Gerade;
8) $g_1 g_2 k$: zwei Gerade und ein Kreis;
9) $g k_1 k_2$: eine Gerade und zwei Kreise;
10) $k_1 k_2 k_3$: drei Kreise.

Frage 105. Welche Aufgaben fallen durch vereinigte Lage einzelner Elemente ebenfalls unter das allgemeine Apollonische Problem?

Antwort. Indem ein Punkt auf einem andern Punkt, einer Geraden oder einem Kreise selbst liegen kann, erhält man noch folgende sechs Aufgabengruppen der zu berührenden Elemente:

I. $(P_1 g) P_2$: ein Punkt auf einer Geraden und ein Punkt;
II. $(P g_1) g_2$: ein Punkt auf einer Geraden und eine Gerade;
III. $(P g) k$: ein Punkt auf einer Geraden und ein Kreis;
IV. $(P_1 k) P_2$: ein Punkt auf einem Kreis und ein Punkt;
V. $(P k) g$: ein Punkt auf einem Kreis und eine Gerade;
VI. $(P k_1) k_2$: ein Punkt auf einem Kreis und ein Kreis.

Erkl. 342. Die nebenstehenden sechs Aufgaben I—VI entstehen durch unmittelbare Zusammenfassung der eingeklammerten Elemente aus den obigen 1—10 wie folgt:

2 ··· I, 4 ··· II, 5 ··· III, 6 ··· VI
3 ··· IV, 5 ··· V.

Man kann dieselben Aufgaben I—IV aber auch aus andern Aufgaben 1—10 entstehen lassen, indem man z. B. bei 1 durch Zusammenrücken zweier Punkte einen Doppelpunkt nebst der ursprünglichen Verbindungsgeraden der Punkte entstehen lässt (I). Ebenso liefert (gk) dasselbe wie (Pg) bezw. (Pk).

Frage 106. Wieviele Lösungen hat jede der in vorigen Antworten aufgestellten Aufgaben?

Antwort. Von den vorigen Aufgaben 1—10 und I—VI haben:

eine einzige Lösung: die Aufgaben 1; I, IV;

zwei Lösungen: die Aufgaben 2, 3, 4; II, III, V, VI;

vier Lösungen: die Aufgaben 5, 6, 7 (und unter Umständen 8);

acht Lösungen: die Aufgaben 8 (allgemein), 9, 10.

Erkl. 343. Ein Kreis, der eine Gerade oder einen Kreis berührt, liegt ganz auf einer Seite dieser Geraden oder des Kreises (ganz innen oder ganz aussen). Es ist also nicht möglich einen Berührungskreis zu konstruieren für eine Gerade oder einen Kreis und zwei andere Elemente, deren eines innen, deren anderes aussen läge. Im übrigen dürfen die Elemente völlig willkürlich gewählt werden; und die Aufgaben sind sämtlich möglich mit der vollen Zahl Lösungen. — Nur bei Aufgabe 8 $(g_1 g_2 k)$ erhält

man den allgemeinen Fall mit allen 8 Lösungen bloss dann, wenn der Kreis k die beiden gegebenen Geraden $g_1 g_2$ schneidet. Sonst beschränkt sich die Lösung auf denjenigen (gestreckten oder) schiefen Winkelraum, in welchem der Kreis k liegt; und man erhält nur vier Lösungen.

Dabei ist als einzige Bedingung für die allgemeinste Wahl der gegebenen Stücke festgestellt, dass diese zwar auseinanderliegen, dass aber nicht durch eines der gegebenen Elemente Gerade oder Kreis die beiden andern gegebenen Elemente (Punkt, Gerade oder Kreis) getrennt liegen dürfen.

Frage 107. Welche von den Aufgaben 1—10 bezw. I—VI konnten schon mit den in früheren Teilen dieses Lehrbuches gefundenen Hilfsmitteln gelöst werden?

Antwort. Aufgabe 1 $(P_1 P_2 P_3)$ und 7 $(g_1 g_2 g_3)$ bilden den Gegenstand der Kapitel A 4a und A 4b im IV. Teile dieses Lehrbuches.

Die Aufgaben I $[(P_1 g) P_2]$ und IV $[(P_1 k) P_2]$, sowie Aufgabe II $[(P g_1) g_2]$ und V $[(Pk) g]$ beruhen auf der Anwendung der Sätze 5 und 11 bezw. 13 und 34 des IV. Teiles dieses Lehrbuches.

Die Aufgaben III $[(Pg) k]$ und VI $[(P k_1) k_2]$ werden erledigt durch Anwendung der Antwort der Frage 137 des IV. Teiles dieses Lehrbuches.

Die Aufgaben 2 $(P_1 P_2 g)$ und 4 $(P g_1 g_2)$ sind gelöst in Antwort der Frage 73 des VI. Teiles und Aufgabe 175 des VII. Teiles dieses Lehrbuches.

Es bleiben also mit den Mitteln des vorliegenden achten Teiles noch zu lösen übrig die Aufgaben 3, 5, 6, 8, 9, 10 des Apollonischen Problems.

Erkl. 344. In Aufgabe 1 genügen zwei Mittelsenkrechte, in Aufgabe 7 vier Winkelhalbierende zur Auffindung der Kreismittelpunkte. In Aufgabe I und II bringt man die Senkrechte im gegebenen Berührungspunkte der Tangente zum Schnitt mit einer Mittelsenkrechten bezw. mit den beiden Winkelhalbierenden des Tangentenwinkels; in Aufgabe IV und V ebenso die Centrale des gegebenen Berührungspunktes mit einer Mittelsenkrechten bezw. mit den beiden Halbierenden des Winkels der gegebenen Tangente und jener im gegebenen Berührungspunkte.

Erkl. 345. In Aufgabe III zieht man in k den Durchmesser $\perp g$, verbindet P mit dessen Endpunkten und erhält so auf k die Berührungspunkte der gesuchten Kreise. Deren Radien treffen die in P auf g errichtete Senkrechte in den gesuchten Mittelpunkten. — In Aufgabe VI zieht man in k_1 den Radius durch P und in k_2 den dazu parallelen Durchmesser, verbindet P mit dessen Endpunkten und erhält so auf k_2 die Berührungspunkte der gesuchten Kreise. Deren Radien treffen den Radius $k_1 P$ in den gesuchten Mittelpunkten.

Erkl. 346. Für Aufgabe 2 werden $P_1 P_2$ verbunden und zu deren Abschnitten bis zum Schnittpunkte Q mit g die mittlere Proportionale konstruiert. Diese liefert die Tangentenabschnitte auf g von Q aus. Aufgabe 4 wird auf Aufgabe 2 zurückgeführt, indem durch Symmetrie zu Punkt P ein P_2 entsteht, und dann für $P_1 P_2 g_1$ die vorige Aufgabe zu lösen ist.

Frage 108. Wie werden die noch übrigen sechs Aufgaben des Apollonischen Problems gelöst?

Antwort. Um die übrigen Aufgaben zu lösen, wendet man den Sekantensatz in passender Weise an auf die Aufgaben 3, 5 und 6; und führt die letzten drei Aufgaben 8, 9, 10 durch entsprechende Vereinfachungen zurück auf die Aufgaben 4, 5, 6.

Erkl. 347. Der zu Aufgabe 3 benützte Punkt S ist Potenzpunkt für k und alle Kreise durch P_1 und P_2; denn es ist:

$$SP_1 \cdot SP_2 = SQ_1 \cdot SQ_2 = \overline{ST}^2,$$

wo ST die gemeinsame Länge der Tangenten von S an die genannten Kreise ist. — Die beiden Tangenten von S an K liefern zwei Kreise $(P_1 P_2 k)$.

Erkl. 348. In Aufgabe 5 entsteht auf PA_1 ein Punkt Q_1, auf PA_2 ein Punkt Q_2. Für die Elementengruppe PQ_1g gibt es dann nach Aufgabe 2 ein erstes Kreispaar, für PQ_2g ein zweites Kreispaar, also im ganzen vier Kreise. — Dass der Punkt Q auf dem gesuchten Kreise liegen muss, folgt daraus, dass (nach Antwort der Frage 137 des IV. Teiles) die Berührungspunkte X und Y des gesuchten Kreises auf einer Geraden durch A_1 bezw. A_2 liegen müssen, also:

$$A_1X_1 \cdot A_1Y_1 = A_1A_2 \cdot A_1F = A_1P \cdot A_1Q_1$$

und ebenso:

$$A_2X_2 \cdot A_2Y_2 = A_2A_1 \cdot A_2F = A_2P \cdot A_2Q_2.$$

Erkl. 349. Da in Aufgabe 6 der Aehnlichkeitspunkt Potenzpunkt für alle die Kreise ist, welche k_1 und k_2 in gleicher Weise berühren (der äussere Aehnlichkeitspunkt für alle gleichartig, der innere für alle ungleichartig berührenden Kreise), so ist:

$$SR_1 \cdot SR_2 = SP \cdot SQ.$$

Liefert nun der äussere Aehnlichkeitspunkt einen Punkt Q_1, so entsteht nach Aufgabe 3 für P, Q_1, k_1 ein erstes Kreispaar mit gleichartiger Berührung von k_1 und k_2; liefert der innere Aehnlichkeitspunkt einen Punkt Q_2, so entsteht für P, Q_2, k_1 ein zweites Kreispaar X mit ungleichartiger Berührung von k_1 und k_2, also zusammen vier Kreise.

Erkl. 350. Bei Aufgabe 8 seien die Parallelen zu g_1 und g_2 bezw. $l_1' \parallel g_1 \parallel l_1''$ und $l_2' \parallel g_2 \parallel l_2''$. Dann kann der Mittelpunkt von k zu dem Parallelogramm bezw. Rhombus $l_1' l_1'' l_2' l_2''$ verschiedene Lage annehmen, je nachdem derselbe innerhalb oder ausserhalb des Rhombus zu liegen kommt: Im ersten Falle kann jedes der vier Parallelenpaare verwendet werden, und man erhält viermal 2, also 8 Kreise. Im zweiten Falle können immer nur zwei Parallelenpaare verwendet werden und man erhält nur zweimal 2, also 4 Kreise. Der erste oder der zweite Fall trifft aber zu, wenn der Kreis k beide Geraden $g_1 g_2$ oder wenn er nur eine bezw. keine derselben schneidet. Schneidet k beide Gerade, so gibt es vier oder zwei eingeschlossene und dazu vier oder sechs ausgeschlossene Berührungskreise, je nachdem der Schnittpunkt von $g_1 g_2$ innerhalb oder ausserhalb k liegt. Schneidet k eine Gerade g, so gibt es vier ausgeschlossene, schneidet k keine Gerade g, so gibt es zwei einschliessende oder zwei ausgeschlossene Berührungskreise.

Bei Aufgabe **3** $(P_1 P_2 k)$ liefert ein beliebiger Schnittkreis k' von k durch P_1 und P_2 zwei Schnittpunkte Q_1 und Q_2, und dann schneiden sich die Sehnen P_1P_2 und Q_1Q_2 in einem Punkte S, dessen Tangenten an k diesen Kreis in den Berührungspunkten des gesuchten Kreises treffen.

In Aufgabe **5** (Pgk) liefert der zu g senkrechte Durchmesser von k einen Fusspunkt F und zwei Kreispunkte $A_1 A_2$. Dann schneidet ein Kreis durch PFA_1 die Linie PA_2 und ebenso ein Kreis durch PFA_2 die Linie PA_1 je in einem weiteren Punkte Q, durch welchen der gesuchte Kreis geht; also ist die Aufgabe Pgk zurückgeführt auf PQg (2) oder PQk (3).

Aufgabe **6** (Pk_1k_2) stützt sich auf Satz 8: Ein Aehnlichkeitspunkt S von k_1 und k_2 liefert ein beliebiges Paar inverser Punkte R_1R_2. Und ein Kreis durch PR_1R_2 schneidet die Gerade SP in einem zweiten Punkte Q, welcher auf dem gesuchten Kreise liegt; also ist die Aufgabe Pk_1k_2 zurückgeführt auf PQk (3).

In Aufgabe **8** (g_1g_2k) und **9** (gk_1k_2) und **10** $(k_1k_2k_3)$ kommt ein gemeinsamer Grundsatz der Zurückführung zur Anwendung: Wenn nämlich ein erster Kreis einen zweiten Kreis ausschliessend berührt, und man vergrössert des ersteren Radius um den Radius des zweiten Kreises, so entsteht zum ersten Kreise ein koncentrischer Kreis, welcher durch den Mittelpunkt des zweiten Kreises geht. — Wenn aber ein erster Kreis einen zweiten einschliessend berührt, und man verkleinert des ersteren Radius um den Radius des zweiten Kreises, so entsteht zum ersten Kreise ein koncentrischer Kreis, welcher durch den Mittelpunkt des zweiten Kreises geht. Bei geraden Linien treten an Stelle der koncentrischen Kreise parallele Geraden in einem Abstand gleich dem Radius des berührten Kreises.

Hiernach zieht man bei Aufgabe **8** (g_1g_2k) zu den Geraden g_1 und g_2 Par-

allelen $l_1 l_2$ im Abstande r und konstruiert dann Kreise, welche je zwei dieser Parallelen berühren und durch den Mittelpunkt des Kreises k gehen; also nach Aufgabe 4 $(l_1 l_2 P)$.

Ebenso konstruiert man bei Aufgabe **9** $(g k_1 k_2)$, wobei mit k_2 der kleinere der beiden Kreise bezeichnet sein möge, zu g zwei Parallelen l im Abstande r_2 und zu k_1 zwei koncentrische Kreise k' mit Radien $r_1 \pm r_2$ und sucht dann Kreise, welche je eine dieser Parallelen und einen der koncentrischen Kreise berühren und durch den Mittelpunkt des Kreises k_2 gehen, also nach Aufgabe 5 (l, k', P).

Erkl. 351. Bei Aufgabe 9 sei $l' \| g \| l''$ (l'' jenseits g von k aus) und $k' k''$ koncentrisch k mit Radien $r_1 \pm r_2$ gezogen, P_2 Mittelpunkt von k_2. Dann liefert nach Aufgabe 5 die Gruppe $l' k' P_2$ vier Kreise mit Ausschliessung von k_2, und die Gruppe $l'' k'' P_2$ vier andere Kreise mit Einschliessung von k_2, also zusammen acht Kreise.

Sind endlich bei Aufgabe **9** $(k_1 k_2 k_3)$ die Bezeichnungen so, dass $r_1 > r_2 > r_3$, so zeichnet man zu k_1 und k_2 koncentrische Kreise $k' k''$ mit Radien $r_1 \pm r_3$ und $r_2 \pm r_3$ und sucht Kreise, welche je zwei dieser koncentrischen Kreise berühren und durch den Mittelpunkt von k_3 gehen; also nach Aufgabe 6 (k', k'', P).

Erkl. 352. Für Aufgabe 10 sind die zu je zwei Kreisen führenden Gruppen nach Aufgabe 6:

Kreise I) $r_1 + r_3,\ r_2 + r_3,\ P_3$: 2 Kreise $\begin{cases} k_1 \text{ ausgeschlossen, } k_2 \text{ ausgeschlossen, } k_3 \text{ eingeschlossen: 2,} \\ k_1 \text{ eingeschlossen, } k_2 \text{ eingeschlossen, } k_3 \text{ ausgeschlossen: 7.} \end{cases}$

II) $r_1 + r_3,\ r_2 - r_3,\ P_3$: 2 Kreise $\begin{cases} k_1 \text{ ausgeschlossen, } k_2 \text{ eingeschlossen, } k_3 \text{ eingeschlossen: 4,} \\ k_1 \text{ eingeschlossen, } k_2 \text{ ausgeschlossen, } k_3 \text{ ausgeschlossen: 5.} \end{cases}$

III) $r_1 - r_3,\ r_2 + r_3,\ P_3$: 2 Kreise $\begin{cases} k_1 \text{ ausgeschlossen, } k_2 \text{ eingeschlossen, } k_3 \text{ ausgeschlossen: 3,} \\ k_1 \text{ eingeschlossen, } k_2 \text{ ausgeschlossen, } k_3 \text{ eingeschlossen: 6.} \end{cases}$

IV) $r_1 - r_3,\ r_2 - r_3,\ P_3$: 2 Kreise $\begin{cases} k_1 \text{ ausgeschlossen, } k_2 \text{ ausgeschlossen, } k_3 \text{ ausgeschlossen: 1,} \\ k_1 \text{ eingeschlossen, } k_2 \text{ eingeschlossen, } k_3 \text{ eingeschlossen: 8.} \end{cases}$

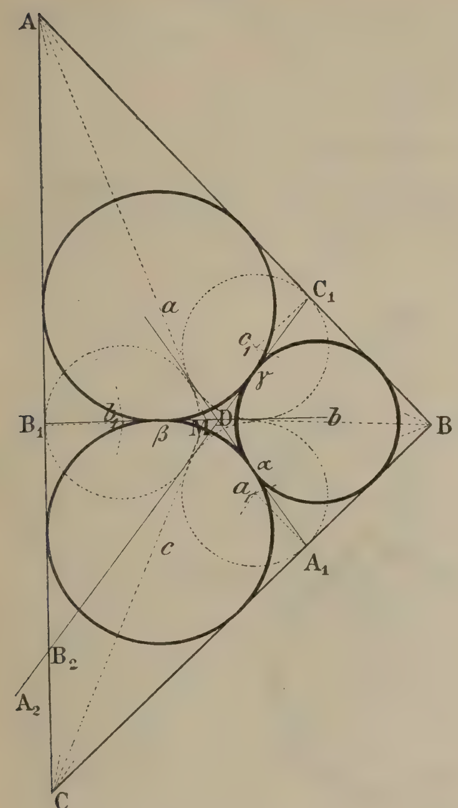
Es entsteht also jede Gruppierung der ein- und ausschliessenden Berührung:

	1	2	3	4	5	6	7	8
k_1:	aus	aus	aus	aus	ein	ein	ein	ein
k_2:	aus	aus	ein	ein	aus	aus	ein	ein
k_3:	aus	ein	aus	ein	aus	ein	aus	ein
	IV 1	I 1	III 1	II 1	II 2	III 2	I 2	IV 2

Erkl. 353. Die genannten 10 Aufgaben lassen auch noch andere Lösungen zu, insbesondere durch Anwendung des Princips der reciproken Radien, sodann auch unter Anwendung der Begriffe der Polarität und Potenzialität; — sie lassen sich sämtlich als Specialfälle der letzten als wichtigsten Aufgabe ansehen; — sie lassen zum Teil sehr umständliche Determinationen entstehen durch die verschiedenen Einzelfälle der gegenseitigen Lage der gegebenen Elemente; — sie erzeugen eine grosse Menge von andern zugehörigen Nebenaufgaben auch ausser den oben miterwähnten Nr. I—VI. — Ueber alle diese Gegenstände sehe man in dem besonderen Teile dieser Encyklopädie: Cranz, das Apollonische Berührungsproblem.

Frage 109. Was versteht man unter der Aufgabe des Malfatti?

Figur 97.



Erkl. 354. Die obige Aufgabe ist seit Steiners Vorgang (1826) benannt nach dem italienischen Mathematiker Malfatti (1731 bis 1807), welcher zuerst über dieselbe geschrieben hat.

Erkl. 355. Steiners Lösung für die Dreiecksaufgabe lautet (Fig. 97):

1) Man halbiere die Winkel (bezw. Aussenwinkel) des Dreiecks durch die drei Geraden AM, BM, CM.

2) Zu den Dreiecken AMB, BMC, CMA beschreibe man die Berührungskreise c_1. a_1, b_1, welche die zugehörigen Seiten des Dreiecks ABC in C_1, A_1, B_1 berühren.

3) Aus den Punkten C_1, A_1, B_1 lege man an die Kreispaare $a_1 b_1$, $b_1 c_1$, $c_1 a_1$ die gemeinsamen Tangenten $C_1 D$, $A_1 D$, $B_1 D$; — so sind

4) die Berührungskreise der Vierecke:

$$C_1 D A_1 B, \quad A_1 D B_1 C, \quad B_1 D C_1 A$$

die drei verlangten Kreise.

Antwort. Unter dem Problem des Malfatti versteht man die Aufgabe:

In ein Dreieck drei Kreise zu beschreiben, so dass jeder zwei Seiten des Dreiecks und zugleich jeden andern Kreis berührt.

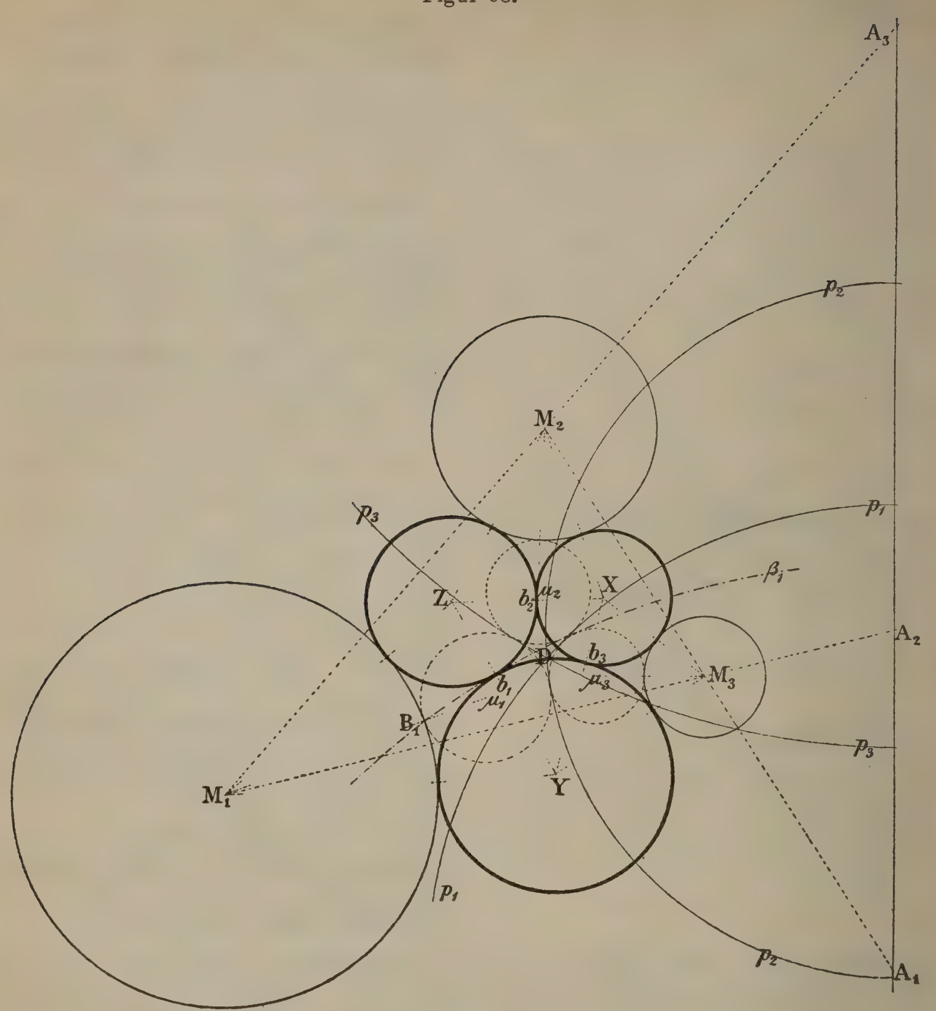
Befreit man diese Aufgabe von der Beschränkung, dass die drei Kreise im Innern des Dreiecks liegen müssen, so erhält man im ganzen 128 verschiedene Lösungen von je drei (bei 28 von den 128 Fällen teilweise zusammenfallenden) Kreisen, deren jeder jeden andern berührt und zugleich zwei Dreiecksseiten innen oder aussen berührt (s. Figur 97).

Man kann die Aufgabe auch dahin erweitern, dass man nicht zu drei gegebenen Geraden, sondern zu drei gegebenen Kreisen drei Kreise sucht, deren jeder zwei der gegebenen Kreise und ausserdem die beiden andern neuen Kreise berührt. Diese Fassung der Aufgabe liefert sogar 256 verschiedene Lösungen von je drei (in einzelnen Fällen wieder teilweise zusammenfallenden) Kreisen von der verlangten Eigenschaft (s. Figur 98 auf folgender Seite).

Die berühmteste Lösung der beiden Aufgaben stammt von dem deutschen Mathematiker Steiner (Werke von J. Steiner, Band I, S. 35 ff.).

Eingehendere Behandlung der Aufgabe findet man in dem schon genannten Buche dieser Encyklopädie von Cranz, über das Apollonische Problem, sowie in der Programmabhandlung von J. Sachs, Durlach (Freiburg 1885), Nr. 562.

Figur 98.



Erkl. 356. Steiners Lösung für die verallgemeinerte Kreisaufgabe lautet (Figur 98):

1) Man konstruiere um drei auf einer Geraden liegenden Aehnlichkeitspunkte $A_1 A_2 A_3$ der gegebenen Kreise $M_1 M_2 M_3$ die zugehörigen Potenzkreise $p_1 p_2 p_3$, welche durch einen Punkt D gehen.

2) Hierauf beschreibe man die drei Berührungskreise $\mu_1 \mu_2 \mu_3$ der Kreisgruppen $M_1 p_2 p_3$, $M_2 p_3 p_1$, $M_3 p_1 p_2$, welche die zugehörigen Kreise $M_1 M_2 M_3$ in den Punkten $B_1 B_2 B_3$ berühren.

3) Ferner beschreibe man durch die Punkte $B_1 B_2 B_3$ die drei Berührungskreise $\beta_1 \beta_2 \beta_3$, welche noch je die beiden andern Kreispaare $\mu_2 \mu_3$, $\mu_3 \mu_1$, $\mu_1 \mu_2$ berühren.

4) Dann sind endlich die Berührungskreise der Kreisgruppen $M_1 M_2 \beta_1 \beta_2$, $M_2 M_3 \beta_2 \beta_3$, $M_3 M_1 \beta_3 \beta_1$ drei Kreise von der verlangten Eigenschaft.

Aufgaben-Sammlung.

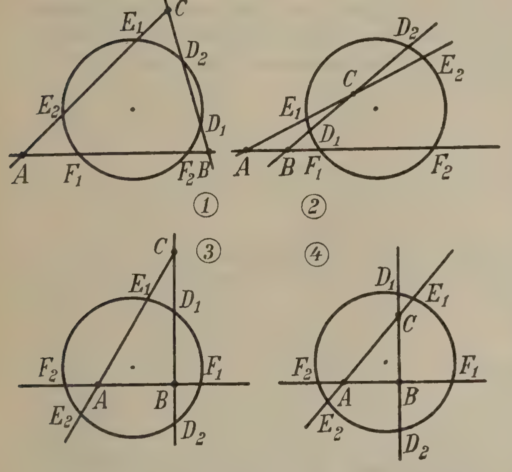
1) Aufgaben über die Aehnlichkeit geradliniger Figuren am Kreise.

(Zu Abschnitt 1.)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 1. Man soll den Sekantensatz anwenden auf die Schnittpunkte eines Kreises mit den drei Seiten eines Dreiecks.

Figur 99.



Erkl. 357. Wie aus Figur 99 hervorgeht, kann ein Dreieck vierfach verschiedene Lage zu einem Kreise haben, je nachdem kein, ein, zwei oder drei Eckpunkte desselben innerhalb des Kreises liegen. Für äussere Eckpunkte kommt der Sekantensatz, für innere der Sehnensatz in Anwendung, im übrigen bleibt der nebenstehende Beweis völlig unverändert gleich.

Erkl. 358. Der nebenstehende Satz ist zuerst aufgestellt worden von dem französischen Mathematiker Carnot und nach demselben benannt. In seiner ersten Fassung ist das Anschreiben leichter zu bewerkstelligen, indem bloss von den Ecken in beiden Umlaufsrichtungen die Abschnitte angeschrieben werden:

Von Ecke A auf Seite c, von Ecke B auf Seite a, von Ecke C auf Seite b — und in umgekehrtem Umlauf:

Von Ecke A auf Seite b, von Ecke C auf Seite a, von Ecke B auf Seite c.

In der zweiten Fassung lehnt sich die Anschreibung des Satzes an jene des Satzes von Menelaos an, indem genau wie dort (in Erkl. 137 des VII. Teiles dieses Lehrbuches) der Umlauf

Auflösung. Sind die Schnittpunkte des Kreises mit den Seiten a, b, c der Reihe nach $D_1 D_2 E_1 E_2 F_1 F_2$, so gilt nach Satz 1 für die Ecken der Reihe nach in der Umlaufsrichtung $A — B — C$:

Ecke A: $AF_1 \cdot AF_2 = AE_2 \cdot AE_1$,
Ecke B: $BD_1 \cdot BD_2 = BF_2 \cdot BF_1$,
Ecke C: $CE_1 \cdot CE_2 = CD_2 \cdot CD_1$.

Durch Multiplikation aller drei Gleichungen entsteht:

$$(AF_1 \cdot AF_2) \cdot (BD_1 \cdot BD_2) \cdot (CE_1 \cdot CE_2) = (AE_1 \cdot AE_2) \cdot (CD_1 \cdot CD_2) \cdot (BF_1 \cdot BF_2),$$

oder in anderer Zusammenfassung:

$$(AF_1 \cdot BD_1 \cdot CE_1) \cdot (AF_2 \cdot BD_2 \cdot CE_2) = (F_1B \cdot D_1C \cdot E_1A) \cdot (F_2B \cdot D_2C \cdot E_2A).$$

Man kann also den Satz aussprechen:

Satz. Werden die drei Seiten eines Dreiecks von einem Kreise geschnitten, so entstehen durch Multiplikation der drei Paare der von jeder Ecke ausgehenden beiden Seitenabschnitte in entgegengesetzten Umlaufsrichtungen zwei gleichgrosse Produkte.

Oder:

Satz. Werden die drei Seiten eines Dreiecks von einem Kreise geschnitten, so entstehen durch Multiplikation der beiden Gruppen von je drei nicht aneinanderstossenden Seitenabschnitten zwei gleichgrosse Produkte (Satz von Carnot).

ABC unterbrochen durch die Teilpunkte $F_1D_1E_1$ und sodann derselbe Umlauf ABC unterbrochen durch die Teilpunkte $F_2D_2E_2$ erscheint. Eine Anwendung des nebenstehenden Satzes ist bereits enthalten in Antwort der Frage 99 beim Beweise des Satzes von Paskal.

Aufgabe 2. Man soll den Punktebereich feststellen, für welchen die Möglichkeit desselben ($\pm$) Potenzwertes in Bezug auf einen gegebenen Kreis besteht.

Erkl. 359. Man vergleiche als weitere hierhergehörigen Aufgaben die in der Aufgabensammlung am Schlusse des VI. Teiles dieses Lehrbuches enthaltenen Aufgaben 267—270, sowie 284, 285.

Erkl. 360. Hat ein Punkt die Entfernung $r\sqrt{2}$ vom Kreismittelpunkt, so bildet seine Tangente an den Kreis mit dem Radius ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse $r\sqrt{2}$, also ist die zweite Kathete gleich:

$$\sqrt{(r\sqrt{2})^2 - r^2} = \sqrt{2r^2 - r^2} = \sqrt{r^2} = r.$$

Berechnet man die Fläche des gesuchten Punktebereiches nach Satz 5, so findet man für den Kreis mit Radius r die Fläche πr^2, für den Kreis mit Radius $r\sqrt{2}$ die Fläche $2r^2\pi$, also für den Kreisring die Fläche:

$$2r^2\pi - r^2\pi = r^2\pi$$

d. h. für diesen Kreisring genau dieselbe Flächengrösse wie für das Kreisinnere.

Auflösung. Da der Wert der Potenz von der Peripherie zum Mittelpunkt fällt von 0 bis r^2, von der Peripherie nach aussen steigt von 0 bis ∞, so muss ein Kreisring ausserhalb der Peripherie alle Punkte enthalten, welche denselben (positiven bezw. negativen) Wert der Potenz liefern können. Der Potenzwert $+r^2$ besteht für alle Punkte eines koncentrischen Kreises mit Radius $r\sqrt{2}$; folglich wird der verlangte Punktebereich gebildet von dem Innern des Kreises und dem Kreisringe zwischen dem Kreise r und dem koncentrischen mit Radius $r\sqrt{2}$.

Aufgabe 3. Man soll die Aufgabe des goldenen Schnitts einer gegebenen Strecke a mittels eines Kreises von beliebig vorgegebenem Radius ausführen.

Erkl. 361. In beiden Fällen nebenstehender Aufgabe kann entweder die Lage des Kreises bei beliebiger Lage von a, oder die Lage der Strecke a bei beliebiger Lage des Kreises willkürlich vorgeschrieben werden. Die nebenstehenden Lösungen gehen von der ersten Voraussetzung aus. Im zweiten Falle wäre zur Strecke a als Sehne bezw. Tangente der Kreis von vorgeschriebenem Radius erst hinzuzuzeichnen.

Erkl. 362. Die Sätze 47 und 48 des IV. Teiles lauten:

Der geometrische Ort für den Mittelpunkt einer Sehne von bestimmter Länge in einem gegebenen Kreise ist der koncentrische Kreis, dessen Radius gleich ist der Kathete in einem rechtwinkligen Dreieck mit dem Radius des gegebenen Kreises als Hypotenuse und der Hälfte der gegebenen Sehnenlänge als anderer Kathete

$$\left(\text{also } \sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}\right).$$

Auflösung. 1) Trägt man in den gegebenen Kreis die gegebene Strecke a an beliebiger Stelle als Sehne ein, so gibt es einen koncentrischen geometrischen Ortskreis mit Radius:

$$\sqrt{r^2 + a^2},$$

von dessen Punkten Tangenten von der Länge a an den Kreis gehen. Und dieser Kreis schneidet auf der Verlängerung der Sehne a das gesuchte Stück x ab, denn da Sehne und Tangente die Länge a haben, so wird nach dem Tangentensatz:

$$a^2 = x(a + x).$$

2) Trägt man an den gegebenen Kreis die gegebene Strecke a an beliebiger Stelle als Tangente an, so gibt es einen koncentrischen Ortskreis mit Radius:

$$\sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2},$$

dessen Tangenten für den Hauptkreis Sehnen von der Länge a geben. Zieht man also an diesen Ortskreis vom Endpunkte der

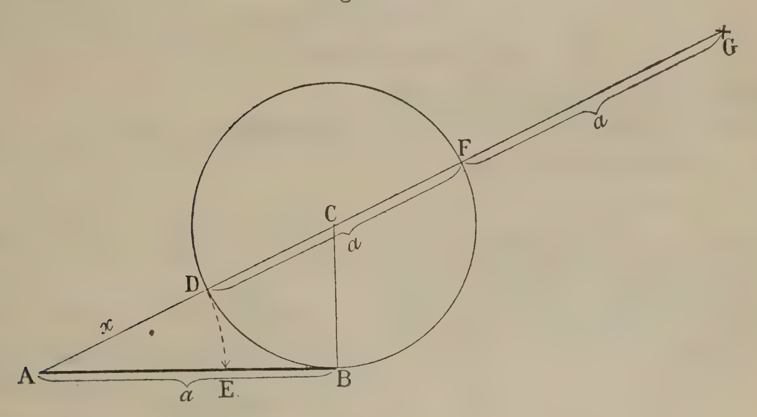
Der geometrische Ort für den Endpunkt einer Tangentenstrecke von bestimmter Länge an einen gegebenen Kreis ist der koncentrische Kreis, dessen Radius gleich ist der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit dem Radius des gegebenen Kreises und der gegebenen Tangentenstrecke als Katheten

(also $\sqrt{r^2 + a^2}$).

Tangente a eine Tangente, so wird auf dieser wieder das gesuchte Stück x abgeschnitten, denn da Sehne und Tangente die Länge a haben, so wird wieder nach dem Tangentensatz:

$$a^2 = x(a + x).$$

Figur 100.



Aufgabe 4. Man soll ein gleichschenkliges Dreieck mit einem Winkel an der Spitze von 36⁰ konstruieren:

1) mit gegebenem Schenkel a,

2) über gegebener Grundseite a.

Auflösung. 1) Man teile die gegebene Strecke a nach dem goldenen Schnitte (Teilpunkt E in Figur 100), und konstruiere über Seite a als Grundseite ein Dreieck mit Seiten a und x; dann hat der Winkel gegenüber x 36^0.

2) Man konstruiere wieder die goldene Teilung für Strecke a, und konstruiere über a als Grundseite ein Dreieck mit zwei gleichen Seiten $a + x$ (Strecke:

$$AF = FD + DA = a + x$$

in Figur 100); dann hat der Winkel gegenüber a die Grösse von 36^0.

Erkl. 363. Der Beweis für die Richtigkeit nebenstehender Konstruktionen liegt in der Anwendung des Satzes 2. Da nämlich in Figur 100 AB in E golden geteilt ist, so ist im ersten gleichschenkligen Dreieck die Grundseite der goldene Abschnitt des Schenkels. Und da in Figur 100 auch AF in D golden geteilt ist [wegen der Gleichung:

$$(a + x) : a = a : x$$

oder:

$$a^2 = x(a + x)$$

oder:

$$x^2 = a(a - x)],$$

so trifft dasselbe fürs zweite Dreieck zu.

Erkl. 364. Ein Vergleich mit Antwort der Frage 22 zeigt, dass im nebenstehenden zugleich die beiden Aufgaben gelöst sind, ein regelmässiges Zehneck zu konstruieren: 1) in einem Kreis mit Radius a, 2) über gegebener Zehnecksseite a.

Aufgabe 5. Welche Winkelgrössen werden durch die vorhergehenden Aufgaben sonst noch konstruierbar?

Auflösung. Wenn der Winkel von 36^0 konstruierbar geworden ist, so kann man auch dessen beliebige Vielfache und dessen 2^nte Teile konstruieren. Da aber diese Teile

Erkl. 365. Beschränkt man sich auf spitze Winkel mit ganzzahligen Graden, so lässt sich durch Zusammenfassung mit 36°, 18°, 9° folgende Gruppe bilden aus den schon früher bekannten Winkeln von 90°, 45° und 60°, 30°, 15°:

auch mit allen früher bekannten Winkeln zusammengestellt werden können, so ergeben sich eine ganze Menge von Winkeln des Winkelmessers, die nunmehr mit Zirkel und Lineal genau konstruierbar sind.

	mit 36°	mit 18°	mit 9°
15°	51°	33°	24°, also auch 12°, 6°, 3°
30°	66°, also auch 33°	48°, also auch 24°, 12°, 6°, 3°	39°
45°	81°	63°	54°, also auch 27°
60°		78°, also auch 39°	69°

Aufgabe 6. Man soll ein gleichschenkliges Dreieck mit gegebener Grundseite c konstruieren, in welchem $\alpha = \frac{1}{3}\gamma$.

Auflösung. Wenn:

$$\alpha = \beta = \frac{1}{3}\gamma,$$

so muss:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0 = \alpha + \alpha + 3\alpha = 5\alpha$$

sein, d. h.:

$$\alpha = \frac{180^0}{5} = 36^0, \quad \beta = 36^0, \quad \gamma = 108^0.$$

Man hat also nach Aufgabe 4 an der gegebenen Seite c beiderseits einen Winkel von 36° anzutragen.

Erkl. 366. Ist nicht die Grundseite c gegeben, sondern etwa der Umfang oder die Höhe, oder eine sonstige Strecke, so verfährt man am besten nach der Aehnlichkeitsmethode, da durch nebenstehende Ueberlegung die Gestalt des Dreiecks festgelegt ist.

Aufgabe 7. Man soll die Ergebnisse der Erklärungen 22 bis 26 bei Festhaltung der Punkte C und D nachweisen.

Auflösung. In Figur 7 wurde:

$$\sphericalangle\, ae = dg$$

angetragen, in Figur 8:

$$\sphericalangle\, af = bg;$$

in Figur 101 ist sowohl:

$$\sphericalangle\, ce = bg$$

als auch:

$$\sphericalangle\, cf = dg$$

konstruiert. Man erhält also aus dem Sehnenviereck $ABCD$ entweder das Viereck $AKDC$ durch Umklappung des $\triangle\, ABC$, oder das Sehnenviereck $BCDL$ durch Umklappung des $\triangle\, ABD$. Und es entsteht, wie in Erkl. 24, folgende Gruppe von Seiten und Winkeln:

$ABCD$: a, $(c)+(d)=\beta$, b, $(d)+(a)=\gamma$, c, $(a)+(b)=\delta$, d, $(b)+(c)=\alpha$, a, Diagonalen e und f,

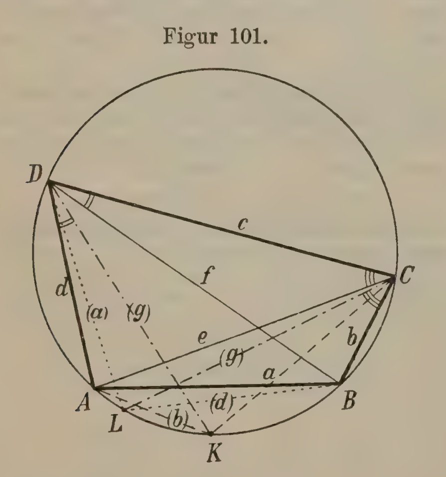
$KCDA$: a, $(b)+(d)=\varepsilon$, c, $(b)+(a)=\delta$, d, $(c)+(a)=\zeta$, b, $(d)+(c)=\beta$, a, Diagonalen g und e,

$DLBC$: a, $(c)+(b)=\alpha$, d, $(a)+(c)=\zeta$, b, $(a)+(d)=\gamma$, c, $(d)+(b)=\varepsilon$, a, Diagonalen f und g.

Es ist also:

$ABCD$ (Figur 101) identisch mit $ABCD$ in Figur 7 und 8,

Figur 101.



Erkl. 367. Da die Dreiecke ABC bezw. ABD in Figur 101 an ihre Grundseiten AC bezw. BD gerade gegenwendig kongruent wieder angesetzt sind, so sind die Seitenwinkel entsprechend gleich in veränderter Reihenfolge, und die Flächen bleiben:

$$ABCD = KCDA = DLBC,$$

nämlich gleich:

$$ABC + ACD = AKC + ACD$$
bezw. gleich:
$$ABD + BCD = LBD + BCD.$$

Man erhält also in Figur 101 dieselben drei Sehnenvierecke aus den vier Seiten a, b, c, d, wie in Figur 7 und 8, nur mit gegenwendiger Kongruenz, da zwar die Reihenfolge der Stücke dieselbe, aber der Umlauf um die Figur einmal mit der Uhr, einmal gegen die Uhr stattfindet.

$KCDA$ (Figur 101) identisch mit $BAHC$ in Figur 8, aber gegenwendig kongruent,

$DLBC$ (Figur 101) identisch mit $BADG$ in Figur 7, aber gegenwendig kongruent.

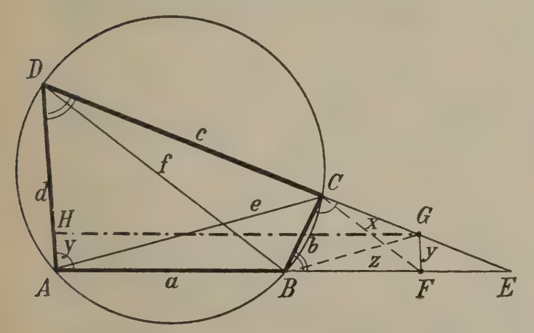
Aufgabe 8. Man soll das Verhältnis der drei Diagonalen e, f, g in Antwort der Frage 9 bestimmen.

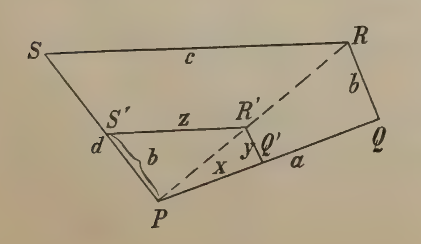
Auflösung. Bildet man aus den Gleichungen der Antwort der Frage 9 die fortlaufende Proportion, so entsteht:
$$ef:fg:ge = (ac+bd):(ab+cd):(ad+bc),$$
oder durch Kürzung mit efg:
$$\frac{1}{g}:\frac{1}{e}:\frac{1}{f} = (ac+bd):(ab+cd):(ad+bc),$$
oder:
$$e:f:g = \frac{1}{ab+cd}:\frac{1}{ad+bc}:\frac{1}{ac+bd}.$$

Erkl. 368. Dasselbe Ergebnis folgt auch aus den in Antwort der Frage 9 abgeleiteten Werten der drei Diagonalen selbst: Der Wurzelausdruck:
$$\sqrt{(ac+bd)\cdot(ab+cd)\cdot(ad+bc)}$$
fällt bei Division weg und man erhält:
$$e:f:g = \frac{1}{ab+cd}:\frac{1}{ad+bc}:\frac{1}{ac+bd}$$
$$= (ad+bc)(ac+bd):(ab+cd)(ad+bc):(ad+bc)(ab+cd),$$
oder wie nebenstehend:
$$\frac{1}{e}:\frac{1}{f}:\frac{1}{g} = (ab+cd):(ad+bc):(ac+bd).$$

Aufgabe 9. Man soll aus vier gegebenen Strecken a, b, c, d ein S e h n e n v i e r e c k k o n s t r u i e r e n.

Figur 102.





Auflösung. A n a l y s i s. Angenommen das Sehnenviereck $ABCD$ in Figur 102 sei das gesuchte. Bringt man darin die an der kleinsten Seite b anstossenden Seiten a und c zum Schnitt in E, und zieht durch B und C Parallelen zu den Diagonalen e und f, so entstehen auf a und c die Verlängerungen z und x, und man hat wegen der Eigenschaften des Sehnenvierecks bezw. der Winkel an den Parallelen:
$$\sphericalangle BCG = 180^0 - BCD = DAB$$
und
$$\sphericalangle CBG = BCA = ADB,$$
folglich:
$$\triangle BCG \sim DAB$$
und
$$b:x = d:a; \quad x = \frac{b}{d}\cdot a.$$
Ferner ist auch:
$$\sphericalangle CBF = 180^0 - ABC = ADC$$
und
$$\sphericalangle BCF = CBD = DAC,$$
folglich:
$$\triangle CBF \sim ADC$$
und
$$b:z = d:c; \quad z = \frac{b}{d}\cdot c.$$

Erkl. 369. Im Sehnenviereck ist die Summe je zweier Gegenwinkel gleich 180°. — Nach Satz 13 des VII. Teiles dieses Lehrbuches sind zwei Vierecke einander ähnlich, wenn sie entsprechend gleichgross haben drei Seitenverhältnisse und die Grösse der beiden eingeschlossenen Winkel. In Figur 102 aber ist:

$$x=\frac{b}{d}\cdot a,\quad y=\frac{b}{d}\cdot b,\quad z=\frac{b}{d}\cdot c,$$

oder:

$$x:y:z=a:b:c,$$

oder:

$$x:a=y:b=z:c,$$

und

$$\sphericalangle(ad)=(xb),\quad \sphericalangle(dc)=(bz),$$

also Viereck:

$$abcd \sim xyzb.$$

Die Winkel (xy) und (cd) bezw. (yz) und (ad) sind der Lage nach „entgegengesetzte Winkel“. Und nach Satz 23 des II. Teiles dieses Lehrbuches müssen, wenn entgegengesetzte Winkel supplementär sind, die geschnittenen Linien parallel sein.

Erkl. 370. Die beiden Vierecke $ABCD$ und $CGFB$ sind ähnlich, aber mit umgekehrter Umlaufsrichtung. Man hat daher den Irrtum zu vermeiden, als ob dieselben in perspektivischer Lage zum Punkte E als Aehnlichkeitspunkt wären. Dass dies nicht zutrifft, erkennt man schon daraus, dass gerade die entsprechenden Strecken:

$$(a,\ x;\ b,\ y;\ c,\ z;\ d,\ b;\ e,\ CF;\ f,\ BG)$$

nicht parallel sind, und die Verbindungslinien entsprechender Punkte AC, BG, CF, DB nicht durch den Punkt E gehen. Es verhält sich aber:

$$a:x=b:y=c:z=d:b,$$

so dass $\frac{d}{b}$ der Faktor ist, mit welchem jede Strecke des ersten Vierecks „verjüngt“ werden muss, um die entsprechende Strecke des zweiten zu liefern.

Erkl. 371. Ist $PQRS$ in Figur 102 ein beliebiges Viereck mit den Seiten:

$$PQ=a,\quad QR=b,\quad RS=c,\quad SP=d,$$

so entsteht durch die Parallelen zu b und c durch jeden beliebigen Punkt der Diagonalen PR ein ähnliches Viereck in perspektivischer Lage mit P als äusserem Aehnlichkeitspunkte. Macht man also $PS'=b$, so ist:

$$b:d=PS':PS=PR':PR=PQ':PQ$$
$$=S'R':SR=Q'R':QR.$$

Folglich ist nicht nur:

$$PS'=\frac{b}{d}\cdot PS=\frac{b}{d}\cdot d,$$

sondern auch:

Demnach stehen im Viereck $BCGF$ die Seiten b, x, z im gleichen Verhältnis wie die Seiten d, a, c des Vierecks $DABC$. Und da ausserdem die eingeschlossenen Winkel gleichgross sind, so ist Viereck:

$$BCGF \sim DABC;$$

folglich auch:

$$b:y=d:b;\quad y=\frac{b}{d}\cdot b.$$

Und ferner ist:

$$\sphericalangle CGF=CBA=180^0-ADC,$$
$$\sphericalangle BFG=BCD=180^0-DAB,$$

folglich $FG \parallel AD$. Zieht man also noch $GH \parallel FA$, so ist:

$$GH=FA=a+z,$$
$$GD=c+x,$$
$$DH=d-y,$$

d. h. Dreieck DGH ist konstruierbar aus den drei Seiten:

$$a+\frac{b}{d}\cdot c,\quad c+\frac{b}{d}\cdot a,\quad d-\frac{b}{d}\cdot b.$$

Und aus Dreieck DGH lässt sich dann nach Figur 102 die Figur vervollständigen.

Konstruktion. Man konstruiert zunächst die drei Stücke:

$$x=\frac{b}{d}\cdot a,\quad y=\frac{b}{d}\cdot b,\quad z=\frac{b}{d}\cdot c.$$

Dies geschieht durch ein beliebiges Viereck $PQRS$ aus den Seiten a, b, c, d, wenn man auf Seite d die Strecke b vom Eckpunkte (ad) anträgt, und zu den Seiten c und b Parallelen zieht (vergl. Erkl. 371). Sodann konstruiert man das Dreieck DGH aus:

$$DG=c+x,\quad GH=a+z,\quad DH=d-y,$$

verlängert DH um y bis $DA=d$, zieht $AB \parallel HG$ und gleich a und trägt auf DG das Stück $DC=c$ ab. Dann ist $ABCD$ das verlangte Sehnenviereck.

Beweis. Da die Seiten a, d, c abgetragen sind, so ist noch der Nachweis zu liefern, dass $BC=b$ wird, sowie dass die Punkte $ABCD$ auf einem Kreise liegen. Zu dem Zwecke bestimmt man die von E ausgehenden Strecken aus der Aehnlichkeit der Dreiecke:

$$EFG \sim EAD \sim GHD;$$
$$EF:EG:y=EA:ED:d$$
$$=(a+z):(c+x):(d-y).$$

Hieraus wird (vergl. Erkl. 372):

$$EF=\frac{a+z}{d-y}\cdot y;\quad EG=\frac{c+x}{d-y}\cdot y;$$
$$EF:EG=\frac{a+z}{c+x}=\frac{ad+bc}{cd+ab}.$$

$$PQ' = \frac{b}{d} \cdot PQ = \frac{b}{d} \cdot a = x;$$

$$Q'R' = \frac{b}{d} \cdot QR = \frac{b}{d} \cdot b = y;$$

$$R'S' = \frac{b}{d} \cdot RS = \frac{b}{d} \cdot c = z.$$

Demnach sind PQ', $Q'R'$, $R'S'$ die zur Konstruktion der Dreiecksseiten des Dreiecks DGH notwendigen Stücke x, y, z — ganz unabhängig davon, wie das ursprüngliche Viereck $PQRS$ aus den Seiten a, b, c, d konstruiert war.

Erkl. 372. In der Analysis ist schon bekannt, dass die vier Dreiecke ähnlich sind:

$$ADE \sim CBE \sim FGE \sim HDG.$$

Aus der Konstruktion muss die Zugehörigkeit des Dreiecks CBE erst bewiesen werden, indem man die von E ausgehenden Strecken berechnet aus den bekannten Werten:

$$x = \frac{b}{d} \cdot a, \quad y = \frac{b}{d} \cdot b, \quad z = \frac{b}{d} \cdot c.$$

Man hat nämlich:

$$EF = \frac{a+z}{d-y} \cdot y = \frac{b^2}{d} \cdot \frac{a + \frac{bc}{d}}{d - \frac{b^2}{d}} = \frac{b^2(ad+bc)}{d(d^2-b^2)};$$

$$EG = \frac{c+x}{d-y} \cdot y = \frac{b^2}{d} \cdot \frac{cd+ab}{d^2-b^2};$$

$$EC = EG + x = \frac{ab}{d} + \frac{b^2(cd+ab)}{d(d^2-b^2)} = \frac{b(ad^2 - ab^2 + bcd + ab^2)}{d(d^2-b^2)} = \frac{bd(ad+bc)}{d(d^2-b^2)} = \frac{b(ad+bc)}{d^2-b^2},$$

$$EB = EF + z = \frac{bc}{d} + \frac{b^2(ad+bc)}{d(d^2-b^2)} = \frac{b(cd^2 - cb^2 + abd + b^2c)}{d(d^2-b^2)} = \frac{bd(cd+ab)}{d(d^2-b^2)} = \frac{b(ab+cd)}{d^2-b^2}.$$

$$EA = EB + a = \frac{b(ab+cd)}{d^2-b^2} + a = \frac{ab^2 + bcd + ad^2 - ab^2}{d^2-b^2} = \frac{d(ad+bc)}{d^2-b^2},$$

$$ED = EC + c = \frac{b(ad+bc)}{d^2-b^2} + c = \frac{abd + bc^2 + cd^2 - cb^2}{d^2-b^2} = \frac{d(ab+cd)}{d^2-b^2}.$$

Hieraus folgt:

$$EF : EG = \frac{ad+bc}{ab+cd}; \quad EC : EB = \frac{ad+bc}{ab+cd}; \quad EA : ED = \frac{ad+bc}{ab+cd}.$$

also lauter gleiche Werte.

Und sodann:

$$EB = EF + z = \frac{(a+z)y + (d-y)z}{d-y} = \frac{ay+dz}{d-y} = \frac{b(ab+cd)}{d^2-b^2}$$

und ebenso:

$$EC = \frac{b(ad+bc)}{d^2-b^2}.$$

Demnach verhält sich:

$$EF : EG = EC : EB = EA : ED.$$

Also sind erstens gleiche Produkte:

$$EC \cdot ED = EA \cdot EB,$$

d. h. die Punkte $ABCD$ liegen auf einem Kreise. Und zweitens ist:

$$EFG \sim ECB \sim EAD \sim GHD,$$

folglich:

$$BC : BE = DH : DG,$$

$$BC = \frac{DH}{DG} \cdot BE = \frac{d-y}{a+z} \cdot \frac{ay+dz}{d-y} = \frac{ay+dz}{a+z} = \frac{ab^2+bcd}{ad+bc} = b.$$

Damit sind die beiden Punkte nachgewiesen, welche oben verlangt waren.

Determination. Die Möglichkeit der Auflösung der Aufgabe ist nur an die Bedingung geknüpft, dass aus den vier gegebenen Stücken a, b, c, d überhaupt ein Viereck möglich ist, da dann aus den Stücken:

$$a+z, \; c+x, \; d-y$$

ein Dreieck HGD immer möglich ist. Und wenn man sich auf das konvexe Viereck beschränkt, so wird man auch für jede Reihenfolge der Seiten stets nur eine einzige Lösung erhalten.

Erkl. 373. Die Seiten des Dreiecks HGD sind:

$$a+z = \frac{ad+bc}{d}, \quad c+x = \frac{cd+ba}{d} \text{ und } d-y = \frac{d^2-b^2}{d}.$$

Vergleicht man unter Weglassung des gemeinsamen Nenners d die Summen je zweier Seiten mit der dritten, so müssen die Ungleichungen bestehen:

1) $ab + cd + ad + bc > d^2 - b^2$ oder $(a+c)(d+b) > (d+b)(d-b)$,

also:

$$a + c > d - b \text{ oder } d < a + b + c;$$

$$2)\quad ab + cd + d^2 - b^2 > ad + bc$$

oder:

$$ad + bc - ab - cd < d^2 - b^2, \quad (a-c)(d-b) < (d+b)(d-b),$$

also:

$$a - c < d + b \text{ oder } a < b + c + d.$$

Und ebenso ergibt die dritte Zusammenfassung das Ergebnis $c < a + b + d$.

Erkl. 374. Denkt man sich, wie in Figur 102, Seite $RS = c$ als die grösste, so kann, da das Viereck fünf willkürliche Stücke hat, noch ein Winkel an c willkürlich gewählt werden. Durch fortlaufende Veränderung desselben werden die Ecken P und Q verschiedene Lage gegen c einnehmen, so dass der Kreis um QRS den Punkt P einschliesst oder ausschliesst. Es wird dann stets möglich sein, den Uebergang von dem einen in den andern Fall festzustellen: und diese Wahl des Winkels liefert dann eben das Sehnenviereck $ABCD$.

Aufgabe 10. Man soll den Radius des Kreises bestimmen, der durch das Sehnenviereck mit gegebenen Seiten $abcd$ bestimmt ist.

Erkl. 375. Aus dem vollständig symmetrischen Auftreten der vier Seiten a, b, c, d im nebenstehenden Ergebnis für r ersieht man wieder, dass für jede Reihenfolge der Seiten der gleiche Kreis entsteht. — Es ist der Ausdruck in a, b, c, d selbst gewählt statt jenem mit s, $s - a$ u. s. w., weil der Zähler des Bruches nicht in s auszudrücken ist. — Nach dem Massstab der Dimensionen hat man im Zähler die sechste, im Nenner die vierte Potenz einer Länge, also $r = \sqrt{L^2} =$ Länge. — Es erscheint beachtenswert, dass bei Aufstellung des Kreisinhaltes πr^2 die Wurzel verschwindet und π als einzige Irrationalzahl im Ausdruck für die Kreisfläche stehen bleibt, solange $abcd$ ganz beliebige rationale Zahlen sind.

Auflösung. Nach Erkl. 28 ist die Fläche F des Sehnenvierecks:

$$\frac{e}{4r}(ab + cd)$$

oder:

$$\frac{f}{4r}(ad + bc).$$

Nun ist aber nach Antwort der Frage 9:

$$ab + cd = f \cdot g$$

und

$$ad + bc = e \cdot g,$$

also liefern beide Formeln:

$$F = \frac{e \cdot f \cdot g}{4r} \quad \text{oder} \quad r = \frac{e \cdot f \cdot g}{4F}.$$

Setzt man hierin aus Antwort der Frage 9 für efg den Wert:

$$\sqrt{(ac + bd)(ab + cd)(ad + bc)}$$

und aus Antwort der Frage 10 für F den Wert:

$$\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}$$

ein, so entsteht:

$$r = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}}.$$

Aufgabe 11. Man berechne die Elemente der Sehnenvierecke mit den Seiten:
α) 5, 6, 7, 8, β) 1, 6, 10, 15, γ) 45, 50, 85, 102.

Auflösung. α) Setzt man:

$$a = 5, \quad b = 6, \quad c = 7, \quad d = 8,$$

so wird in Antwort der Frage 9:

$$\left.\begin{aligned} ef &= ac + bd = 35 + 48 = 83 \\ fg &= ab + cd = 30 + 56 = 86 \\ ge &= ad + bc = 40 + 42 = 82 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} efg &= \sqrt{83 \cdot 86 \cdot 82} = 2\sqrt{83 \cdot 43 \cdot 41} = 2\sqrt{146329} \\ &= 2 \cdot 382{,}53 = 765{,}06 \cdots \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} e &= \frac{1}{86} \cdot efg = \frac{382{,}53}{43} = 8{,}89 \cdots \\ f &= \frac{1}{82} \cdot efg = \frac{382{,}53}{41} = 9{,}35 \cdots \\ g &= \frac{1}{83} \cdot efg = \frac{765{,}06}{83} = 9{,}22 \cdots \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\frac{1}{e} : \frac{1}{f} : \frac{1}{g} = 86 : 82 : 83 \\ &e : f : g = \frac{1}{86} : \frac{1}{82} : \frac{1}{83} = 889 : 935 : 922 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2s &= 26 \\ s &= 13 \\ \hline s-a &= 8 \\ s-b &= 7 \\ s-c &= 6 \\ s-d &= 5 \end{aligned}$$

$$F = \sqrt{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5} = 4\sqrt{3\cdot 5\cdot 7} = 4\sqrt{105} = 4\cdot 10{,}247 = 40{,}988\cdots$$

$$r = \frac{efg}{4F} = \frac{382{,}53}{8\cdot 10{,}247} = \frac{382{,}53}{81{,}976} = 46{,}66\cdots$$

Erkl. 376. In nebenstehenden Beispielen sind e, f, g die drei Diagonalen, welche bei jedem der aus den Seiten a, b, c, d in verschiedener Reihenfolge zu bildenden Sehnenviereck entstehen. Und zwar sind bei der Reihenfolge:

$abcd$ Diagonale von (da) nach (bc) gleich e, von (ab) nach (cd) gleich f,

$acbd$ Diagonale von (ac) nach (bd) gleich f, von (da) nach (bc) gleich g,

$abdc$ Diagonale von (ab) nach (cd) gleich g, von (ac) nach (bd) gleich e.

Man hat also jedesmal nicht nur ein, sondern drei verschiedene Sehnenvierecke, welche aber die Grösse der Seiten, Flächen und Radien gleichgross haben.

β) Ebenso entsteht im zweiten Falle:

$$a = 1, \quad b = 6, \quad c = 10, \quad d = 15$$

$$ef = 100, \quad fg = 156, \quad ge = 75, \quad efg = 300\sqrt{13}$$

$$e = \frac{25}{13}\sqrt{13}, \quad f = 4\sqrt{13}, \quad g = 3\sqrt{13};$$

$$e:f:g = 25:52:39.$$

$$F = \sqrt{1\cdot 6\cdot 10\cdot 15} = \sqrt{4\cdot 15^2} = 30;$$

$$r = \frac{5}{2}\sqrt{13}.$$

γ) $a = 45, \quad b = 50, \quad c = 85, \quad d = 102$

liefert:

$$\left.\begin{aligned} ef &= 8925 = 3\cdot 5^2\cdot 7\cdot 17 \\ fg &= 10920 = 2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 13 \\ ge &= 8840 = 2^3\cdot 5\cdot 13\cdot 17 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} efg &= 2^3\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7\cdot 13\cdot 17 \\ &= 928200 \end{aligned}$$

$$e = 85, \quad f = 105, \quad g = 104$$

$$F = \sqrt{96\cdot 91\cdot 56\cdot 39} = \sqrt{2^8\cdot 3^2\cdot 7^2\cdot 13^2}$$
$$= 16\cdot 3\cdot 7\cdot 13 = 4368$$

$$r = \frac{efg}{4F} = \frac{425}{8} = 53\frac{1}{8}.$$

Erkl. 377. Vergleicht man die drei obenstehenden Beispiele nach dem Ausfall der Ergebnisse, so findet man, dass beim ersten Beispiele alle Grössen e, f, g, F, r mit Wurzeln behaftet, also irrationale Zahlen sind. Beim zweiten Beispiele gilt dasselbe von e, f, g, nicht aber von F. Beim dritten Beispiele endlich sind alle Grössen e, f, g, F, r von Wurzelgrössen frei, sie sind rationale Zahlen. Man kann demnach dreierlei Arten von Sehnenvierecken unterscheiden: in erster Reihe solche, bei welchen alle Grössen e, f, g, F, r mit den Seiten kommensurabel sind, — und diese werden ganz besonders als rationale Sehnenvierecke zu bezeichnen sein; in zweiter Reihe solche, bei welchen zwar die Fläche, nicht aber die Diagonalen und Radien mit den Seiten kommensurabel sind — und diese werden zwar als rationale Vierecke, nicht aber als rationale Sehnenvierecke zu bezeichnen sein. Endlich folgen jene, bei welchen alle Grössen e, f, g, F, r mit den Seiten inkommensurabel sind. Während zu letzter Art jede beliebige Zahlengruppe von Vierecksseiten führt, sind Zahlen der ersten und zweiten Art nur durch besondere Rechnung zu finden.

Erkl. 378. Bei den im engsten Sinne rationalen Sehnenvierecken ist zu beachten, dass wenn eine Diagonale e oder f oder g rational ist, dann die beiden andern ebenfalls rational sein müssen wegen des rationalen Verhältnisses $e:f:g$. Man hat also dann jedes der drei Sehnenvierecke zusammengesetzt aus zwei rationalen Dreiecken; und durch das einzige Sehnenviereck sind sechs verschiedene rationale Dreiecke bestimmt: So hat man im dritten Beispiele nebenstehender Aufgabe:

	Dreieck	Seiten	Fläche	
1)	$\triangle abc$, mit Seiten	45, 50, 85,	Fläche 900	Flächensumme zu je zweien 4368 wie oben.
2)	$\triangle cde$, „ „	85, 85, 102,	„ 3468	
3)	$\triangle adf$, mit Seiten	45, 102, 105,	Fläche 2268	
4)	$\triangle bcf$, „ „	50, 85, 105,	„ 2100	
5)	$\triangle acg$, mit Seiten	45, 85, 104,	Fläche 1872	
6)	$\triangle bdg$, „ „	50, 102, 104,	„ 2496	

Aufgabe 12. Man soll den Satz des Ptolemäus anwendem auf diejenigen besonderen Vierecke, welche Sehnenvierecke sind.

Erkl. 379. Das Ergebnis, dass beim Antiparallelogramm:

$$e^2 = ac + b^2,$$

ist bereits gefunden worden in Antwort der Frage 61 des V. Teiles dieses Lehrbuches. Ebenso deckt sich der Wert für F mit dem dort gesetzten:

$$F = \frac{a+c}{2} \cdot h,$$

wo:

$$h = \sqrt{b^2 - p^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{4b^2 - (a-c)^2}{4}}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{(2b+a-c)(2b-a+c)},$$

also:

$$F = \frac{a+c}{4}\sqrt{(2b+a-c)(2b-a+c)}.$$

Neu ist also die Festsetzung des Wertes für r und für die Diagonale g, welche in dem bei veränderter Reihenfolge der Seiten des Antiparallelogramms gebildeten Sehnenviereck entsteht.

Erkl. 380. Beim Kreisdeltoid und Rechteck ergeben sich keine neuen Beziehungen gegenüber den in Antwort der Frage 61 des V. Teiles dieses Lehrbuches aufgestellten Ergebnissen ausser dem Werte für die neue Diagonale des Vierecks mit anderer Reihenfolge der Seiten. Dagegen ist es sehr beachtenswert, dass durch den in beiden Figuren gemeinsamen Wert für f sich aus dem Ptolemäischen Satz die Beziehung des Pythagoreischen ergibt: Man erkennt also, dass der Pythagoreische Lehrsatz für das rechtwinklige Dreieck ein spezieller Fall des Ptolemäischen Lehrsatzes ist.

Erkl. 381. Das Kreisdeltoid und das Rechteck erscheinen unter dem Gesichtspunkt des Ptolemäischen Lehrsatzes als vollständig zusammengehörige Figuren. Denn wenn beim Deltoid die Reihenfolge der Seiten so geändert wird, dass die gleichen Seiten gegenüberliegen, so entsteht das Rechteck; und wenn beim Rechteck die Reihenfolge der Seiten so geändert wird, dass die gleichen Seiten aneinanderstossen, so entsteht das Kreisdeltoid. Dies erkennt man auch an den Ergebnissen nebenstehender Auflösung: Es entsprechen sich die Grössen a, a; b, c; c, b; d, d; e, g; f, f; g, e; F, F; r, r. Vertauscht man in beiden Gruppen die Buchstaben b und c, e und g, so gehen alle Ergebnisse des Kreisdeltoids und Rechtecks ineinander über. Dasselbe zeigt neben der Rechnung auch die Figur, indem durch Umklappung des von der Diagonale f gebildeten Dreiecks um deren Mittelsenkrechte die beiden Figuren Kreisdeltoid bezw. Rechteck ineinander übergehen.

Auflösung. Besondere Vierecke, welche Sehnenvierecke sind, d. h. welchen ein Kreis umgeschrieben werden kann, sind das Antiparallelogramm, das Deltoid im besonderen Falle, und das Rechteck und Quadrat, sowie endlich das Kreisviereck.

1) Beim Antiparallelogramm ist:

$$b = d, \quad e = f,$$

also ergibt der Ptolemäische Lehrsatz:

$$e^2 = f^2 = ac + b^2, \quad fg = eg = b(a+c)$$
$$efg = e^2 g = b(a+c)\sqrt{ac+b^2};$$
$$e = f = \sqrt{ac+b^2}, \quad g = \frac{(a+c)b}{\sqrt{ac+b^2}}$$
$$F = \frac{1}{4}\sqrt{(a+c)^2(a+2b-c)(-a+2b+c)}$$
$$= \frac{a+c}{4} \cdot \sqrt{(2b+a-c)(2b-a+c)},$$
$$r = \frac{efg}{4F} = \frac{b(a+c)\sqrt{ac+b^2}}{(a+c)\sqrt{(2b+a-c)(2b-a+c)}}$$
$$= \frac{b\sqrt{ac+b^2}}{\sqrt{(2b+a-c)(2b-a+c)}}.$$

2) Bei demjenigen Deltoid, welches einen umgeschriebenen Kreis besitzt, ist die eine Diagonale f Durchmesser,

$$a = b, \quad c = d, \quad \sphericalangle bc = \sphericalangle ad = 90^0.$$

Also wird im Lehrsatze des Ptolemäus:

$$e \cdot f = 2ac, \quad f \cdot g = a^2 + c^2, \quad g \cdot e = 2ac,$$

also:

$$f = g = \sqrt{a^2+c^2}, \quad e = \frac{2ac}{\sqrt{a^2+c^2}};$$
$$efg = 2ac\sqrt{a^2+c^2}$$
$$F = \frac{1}{4}\sqrt{2a \cdot 2a \cdot 2c \cdot 2c} = a \cdot c = \frac{e \cdot f}{2},$$
$$r = \frac{efg}{4F} = \frac{2ac\sqrt{a^2+c^2}}{4ac} = \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{2} = \frac{f}{2}.$$

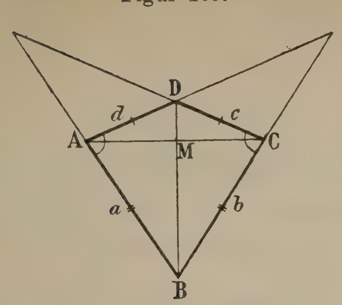
3) Beim Rechteck ist:

$$a = c, \quad b = d, \quad e = f,$$

also liefert Ptolemäus:

$$e^2 = f^2 = a^2 + b^2, \quad eg = fg = 2ab;$$
$$e = f = \sqrt{a^2+b^2}, \quad g = \frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}};$$
$$efg = 2ab\sqrt{a^2+b^2}.$$
$$F = \frac{1}{4}\sqrt{2a \cdot 2b \cdot 2a \cdot 2b} = ab = \frac{eg}{2};$$
$$r = \frac{efg}{4F} = \frac{2ab\sqrt{a^2+b^2}}{4ab} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} = \frac{e}{2}.$$

Figur 103.



4) Beim Kreisviereck oder Sehnentangentenviereck ist:

$$a + c = b + d.$$

Dadurch erfährt die Formelgruppe mit den Diagonalen e, f, g keine übersichtliche Vereinfachung, weil die Ausdrücke wie:

$$ac + bd$$

sich nicht einfach nach $(a + b)$ und $(c + d)$ ausdrücken lassen. Dagegen nimmt der Wert F eine bedeutend einfachere Form an. Setzt man nämlich im Ausdruck:

$$F = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}$$

in der ersten und dritten Klammer $b + d$ für $a + c$, in der zweiten und vierten umgekehrt $a + c$ für $b + d$, so entsteht:

$$F = \frac{1}{4}\sqrt{2b \cdot 2a \cdot 2d \cdot 2c} = \frac{1}{4}\sqrt{16abcd},$$

also ist:

beim Kreisviereck $F = \sqrt{abcd}$.

Erkl. 382. Benützt man für das Kreisviereck oder das bicentrische Viereck die Formel:

$$F = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

so wird:

$$s - a = c,\; s - b = d,\; s - c = a,\; s - d = b,$$

also wieder:

$$F = \sqrt{abcd}.$$

Da dasselbe Viereck einem Kreise umgeschrieben ist, so muss nach Satz 8 des V. Teiles dieses Lehrbuches:

$$F = \frac{\varrho u}{2} = \frac{\varrho}{2}(a+b+c+d) = \varrho(a+c)$$
$$= \varrho(b+d),$$

also:

$$\varrho = \frac{2F}{u} = \frac{\sqrt{abcd}}{a+c} = \frac{\sqrt{abcd}}{b+d}.$$

sein. Während also r noch wohl irrational sein kann bei rationalem F, wird ϱ stets zugleich mit F rational.

Aufgabe 13. Man soll ein Kreisviereck konstruieren, wenn drei Seiten desselben gegeben sind.

Erkl. 383. Nach Antwort der Frage 91 des IV. Teiles dieses Lehrbuches sind die Bestimmungsstücke eines Kreisvierecks: 1) drei Seiten, 2) zwei Seiten und ein Winkel; 3) eine Seite und alle Winkel. Denn die Bedingungen:

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta$$

und

$$a + c = b + d$$

bilden den Ersatz für das vierte und fünfte Bestimmungsstück. Die andern Fälle sind dann auf den ersten zurückzuführen.

Auflösung. Wenn drei Seiten, etwa a, b, c, gegeben sind, so muss im Kreisviereck, weil es ein Tangentenviereck ist:

$$a + c = b + d,$$

also:

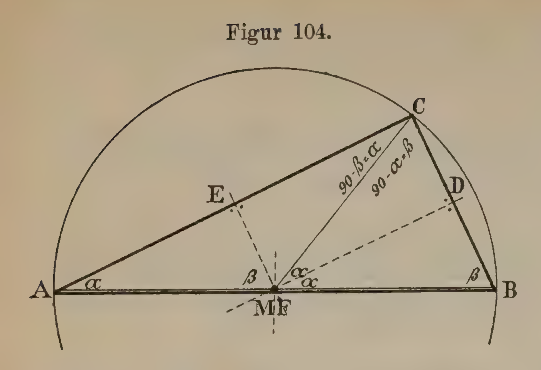
$$d = a + c - b$$

sein. Demnach hat man dieselbe Konstruktion wie in Aufgabe 9, indem alle vier Seiten bekannt sind.

Aufgabe 14. Welches Ergebnis liefert die Antwort der Frage 11 für das rechtwinklige Dreieck?

Auflösung. Im rechtwinkligen Dreieck hat die Hypotenuse jedenfalls zwei spitze anliegende Winkel, jede Kathete aber einen

Figur 104.



spitzen und einen rechten. Folglich gilt (Figur 104):

$$a = \frac{c \cdot \varrho_b \pm b \cdot \varrho_c}{r},$$

$$b = \frac{c \cdot \varrho_a \pm a \cdot \varrho_c}{r},$$

$$c = \frac{a \cdot \varrho_b + b \cdot \varrho_a}{r}.$$

Nun ist aber:

$$\varrho_a = MD = EC = \frac{1}{2} b,$$

$$\varrho_b = ME = CD = \frac{1}{2} a;$$

$$\varrho_c = MF = 0;$$

$$r = MA = \frac{1}{2} c.$$

Folglich bleibt oben stehen:

$$a = \frac{\frac{1}{2} a c}{\frac{1}{2} c}, \quad b = \frac{\frac{1}{2} b c}{\frac{1}{2} c}, \quad c = \frac{\frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} b^2}{\frac{1}{2} c}.$$

Die beiden ersten Aussagen sind selbstverständlich, die dritte liefert wieder:

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

d. h. den Pythagoreischen Lehrsatz als Spezialfall des Ptolemäischen.

Erkl. 384. Beim rechtwinkligen Dreieck ist es zunächst zweifelhaft, ob im Zähler des Bruches + oder — zu setzen ist. Daher ist nebenstehend $\pm$ eingesetzt. Die Klärung geschieht sehr einfach dadurch, dass der zweite Posten Null wird, so dass ± 0 gleichwertig bleibt.

Aufgabe 15. Man soll das Ergebnis der Erkl. 43 in Worten ausdrücken.

Auflösung. Man kann den Satz aufstellen: Verbindet man die zwei Endpunkte eines beliebigen Durchmessers mit denselben zwei Kreispunkten auf gleicher bezw. ungleicher Seite des Durchmessers, so hat die Differenz bezw. Summe der Produkte aus je einer Sehne und dem Mittelpunktsabstand der andern stets denselben Wert, nämlich gleich dem Produkt aus dem Radius und der Verbindungssehne der zwei Kreispunkte.

Erkl. 385. In Figur 12 sind die Durchmesserendpunkte C und D verbunden mit A und B, und es war nach Antwort der Frage 11:

$$c = \frac{a \varrho_c - b \varrho_a}{r} = \frac{AD \cdot \frac{a}{2} - BD \cdot \frac{b}{2}}{r},$$

also:

$$c \cdot r = a \cdot \varrho_b - b \cdot \varrho_a = AD \cdot \frac{a}{2} - BD \cdot \frac{b}{2}.$$

Und in Figur 13 sind A und E verbunden mit B und C, und so ist nach Erkl. 43;

$$a = \frac{b \varrho_c + c \varrho_b}{r} = \frac{e \varrho_d + d \varrho_e}{r},$$

also:

$$a \cdot r = b \varrho_c + c \varrho_b = e \varrho_d + d \varrho_e.$$

---

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 16. Wie entsteht aus dem Satze von Carnot jener von Menelaos?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 1.

Aufgabe 17. Wie ändert sich der Satz von Carnot, wenn der Kreis eine oder mehr Seiten berührt?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 1.

Aufgabe 18. Man soll den goldenen Schnitt ausführen mit einem Kreis, dessen Durchmesser kleiner als a ist.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 3.

Aufgabe 19. Welche Winkelkonstruktionen ermöglicht der goldene Schnitt?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 4.

Aufgabe 20. Man soll einen Winkel von 21^0 konstruieren.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 5.

Aufgabe 21. Man soll ein gleichschenkliges Dreieck konstruieren, von welchem gegeben sind die Fläche F und die Bedingung $\alpha = 2\gamma$.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 6.

Aufgabe 22. Man beobachte die Wirkung der veränderten Reihenfolge der Seiten in Aufgabe 7 und 9.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 7 und 9.

Aufgabe 23. Man berechne die Elemente der Sehnenvierecke, von welchen gegeben sind die Seiten:

α) $a = 7$, $b = 10$, $c = 13$, $d = 16$;

β) $a = 10$, $b = 18$, $c = 21$, $d = 35$;

γ) $a = 1{,}9$, $b = 32{,}5$, $c = 50$, $d = 52$.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 11.

Aufgabe 24. Ein Kreisviereck zu berechnen, wenn gegeben:

$a = 30$, $b = 21$, $c = 5\,(d = 14)$.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 12.

Aufgabe 25. Ein Kreisviereck zu konstruieren, wenn eine Seite und die vier Winkel gegeben sind.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 13.

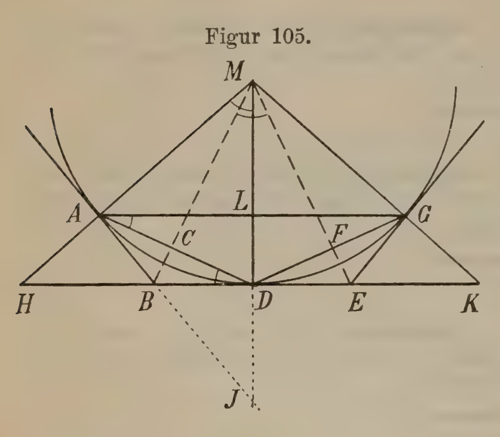
2) Aufgaben über die regulären Polygone und die Kreisteilung.

(Zu Abschnitt 2.)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 26. Man soll allgemeine Beziehungen aufstellen zwischen den Elementen der ein- und umgeschriebenen regulären n- und $2n$-Ecke.

Figur 105.



Erkl. 386. Die beiden Formeln, welche unter I und II im nebenstehenden geometrisch bewiesen sind, lassen sich auch algebraisch beweisen durch Benutzung der in den Antworten der Fragen 13 bis 16 abgeleiteten Formeln:

$$S_n = \frac{r s_n}{\varrho_n}$$

und

$$s_{2n} = r\sqrt{2-\sqrt{4-\left(\frac{s_n}{r}\right)^2}},$$

$$\varrho_n = \frac{r}{2}\sqrt{4-\left(\frac{s_n}{r}\right)^2}.$$

Hiernach ist nämlich:

$$\text{I)}\ \frac{1}{S_{2n}} = \frac{\varrho_{2n}}{r\cdot s_{2n}}$$

$$= \frac{r\sqrt{4-2+\sqrt{4-\left(\frac{s_n}{r}\right)^2}}}{2\cdot r\cdot r\sqrt{2-\sqrt{4-\left(\frac{s_n}{r}\right)^2}}}.$$

Kürzung mit r und Erweiterung mit:

$$\sqrt{2+\sqrt{4-\left(\frac{s_n}{r}\right)^2}}$$

gibt im Zähler dessen Quadrat, also:

Auflösung. Bezeichnet man in Figur 105 AG als s_n, so ist:

$$AD = DG = s_{2n}, \quad HK = S_n,$$

und die Tangenten in A, D, G bilden das umgeschriebene $2n$-Eck, also:

$$S_{2n} = BE = 2\cdot AB = 2BD = 2DE = 2EG.$$

I) Bringt man nun AB und MD zum Schnitt in J, so sind wegen der Symmetrie zur Winkelhalbierenden MB die Strecken:

$$JA = HD$$

und

$$BJ = BH.$$

Demnach wird:

$$AL:BD = JA:JB = HD:HB$$
$$= HD:(HD-BD),$$

oder:

$$\frac{1}{2}s_n : \frac{1}{2}S_{2n} = \frac{1}{2}S_n : \left(\frac{1}{2}S_n - \frac{1}{2}S_{2n}\right).$$

Unter Weglassung des Faktors $\frac{1}{2}$ und Bildung der Produkte entsteht:

$$S_{2n}\cdot S_n = s_n(S_n - S_{2n}) = s_n S_n - s_n S_{2n},$$

folglich durch Auflösung nach S_{2n}:

$$S_{2n} = \frac{s_n\cdot S_n}{s_n + S_n},$$

also reciprok:

$$\frac{1}{S_{2n}} = \frac{s_n + S_n}{s_n\cdot S_n},$$

oder:

$$\underline{\frac{1}{S_{2n}} = \frac{1}{S_n} + \frac{1}{s_n}.}$$

Wird auf beiden Seiten dieser Gleichungen mit $2n$ multipliziert bezw. dividiert, so entsteht, wegen:

$$2n\cdot S_{2n} = U_{2n},$$
$$n\cdot s_n = u_n,$$
$$n S_n = U_n:$$

$$U_{2n} = \frac{2u_n\cdot U_n}{u_n + U_n}$$

bezw.:

$$\underline{\frac{1}{U_{2n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{U_n} + \frac{1}{u_n}\right).}$$

$$\frac{1}{S_{2n}} = \frac{2+\sqrt{4-\left(\frac{s_n}{r}\right)^2}}{2r\sqrt{\left(2-\sqrt{4-\left(\frac{s_n}{r}\right)^2}\right)\left(2+\sqrt{4-\left(\frac{s_n}{r}\right)^2}\right)}} = \frac{2+\sqrt{4-\left(\frac{s_n}{r}\right)^2}}{2r\sqrt{4-4+\left(\frac{s_n}{r}\right)^2}}$$

$$= \frac{2+\sqrt{4-\left(\frac{s_n}{r}\right)^2}}{2r\cdot\frac{s_n}{r}} = \frac{2}{2s_n} + \frac{\frac{r}{2}\sqrt{4-\left(\frac{s_n}{r}\right)^2}}{r\cdot s_n} = \frac{1}{s_n} + \frac{\varrho_n}{r\cdot s_n} = \frac{1}{s_n} + \frac{1}{S_n}.$$

Aehnlich entsteht:

$$\text{II)}\ S_{2n} = \frac{r\cdot s_{2n}}{\varrho_{2n}} = \frac{r^2\sqrt{2-\sqrt{4-\left(\frac{s_n}{r}\right)^2}}}{\frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{4-\left(\frac{s_n}{r}\right)^2}}}.$$

Erweiterung mit:

$$\sqrt{2-\sqrt{4-\left(\frac{s_n}{r}\right)^2}}$$

(ohne Kürzung mit r) gibt wieder im Nenner $\frac{s_n}{r}$, im Zähler das Quadrat dieser Wurzel, also mit dem Faktor r^2 zusammen das Quadrat von von s_{2n}, also:

$$S_{2n} = \frac{s_{2n}^2}{\frac{r}{2}\cdot\frac{s_n}{r}} = \frac{2s_{2n}^2}{s_n},$$

so dass:

$$s_{2n} = \sqrt{\frac{s_n S_{2n}}{2}}.$$

Erkl. 387. Die Formeln für U_{2n}, sowie für F_{2n} und f_{2n} gehen aus denjenigen von S_{2n} und s_{2n} auf algebraischem Wege hervor, können aber selbstverständlich ebenfalls aus den für diese Grössen selbst abgeleiteten Formeln unmittelbar bestätigt werden.

Erkl. 388. Besteht zwischen zwei Grössen a und b und einer dritten Grösse c die Beziehung:

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

oder:

$$c = \frac{2ab}{a+b},$$

so nennt man c das harmonische Mittel von a und b. Besteht dagegen die Beziehung:

$$c^2 = a\cdot b \quad \text{oder} \quad c = \sqrt{ab},$$

so nennt man c das geometrische Mittel zwischen a und b (vergl. Aufgabe 134 u. ff. im VI. Teile dieses Lehrbuches). Man erkennt also, dass im nebenstehenden die Beziehungen für U_{2n} eine glattere Fassung in Worten zulassen, als jene für S_{2n}, bei welchen je noch ein Faktor $\frac{1}{2}$ hinzukommt. Die Formeln für die reciproken Werte finden später noch eine besondere Verwendung.

II) Beachtet man ferner in Figur 105 die gleichschenkligen Dreiecke AGD und ADB, so erkennt man, dass wegen der gleichen Wechselwinkel $GAD = ADB$ beide Dreiecke ähnlich sind, also:

$$GA:AD = AD:DB$$

oder:

$$s_n : s_{2n} = s_{2n} : \frac{1}{2}S_{2n},$$

also:

$$\underline{\underline{s_{2n} = \sqrt{\frac{s_n\cdot S_{2n}}{2}}}}.$$

Beiderseitige Multiplikation mit $2n$ (wie oben) ergibt hier:

$$\underline{\underline{u_{2n} = \sqrt{u_n\cdot U_{2n}}}}$$

bezw.:

$$\frac{1}{u_{2n}} = \sqrt{\frac{1}{U_{2n}}\cdot\frac{1}{u_n}}.$$

III) Durch Multiplikation bezw. Division mit $\frac{r_n}{2}$ bildet man endlich aus den vorigen Formeln noch folgende:

$$\frac{2}{r\cdot U_{2n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{r\cdot U_n}+\frac{2}{r\cdot u_n}\right)$$

und

$$\frac{r\cdot u_{2n}}{2} = \sqrt{\frac{r u_n}{2}\cdot\frac{r U_{2n}}{2}}.$$

Nun ist aber nach Antwort der Frage 13:

$$\frac{r\cdot U_{2n}}{2} = F_{2n}, \quad \frac{r\cdot U_n}{2} = F_n,$$

und nach Erkl. 55:

$$\frac{r\cdot u_n}{2} = f_{2n},$$

also entsprechend:

$$\frac{r\cdot u_{2n}}{2} = f_{4n}.$$

Folglich entsteht oben:

$$\underline{\underline{\frac{1}{F_{2n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{F_n}+\frac{1}{f_{2n}}\right)}}$$

und

$$f_{4n} = \sqrt{f_{2n}\cdot F_{2n}},$$

oder mit Ersetzung von $2n$ durch n:

$$\underline{\underline{f_{2n} = \sqrt{f_n\cdot F_n}}}.$$

Erkl. 389. In Worten lässt sich das vorstehende Ergebnis durch folgende vier Sätze zusammenfassen:

Satz a. Der Umfang eines umgeschriebenen $2n$-Ecks ist das harmonische Mittel zwischen den Umfängen des ein- und umgeschriebenen n-Ecks.

Satz b. Der Umfang eines eingeschriebenen $2n$-Ecks ist das geometrische Mittel zwischen den Umfängen des eingeschriebenen n-Ecks und des umgeschriebenen $2n$-Ecks.

Satz c. Die Fläche eines eingeschriebenen $2n$-Ecks ist das geometrische Mittel zwischen den Flächen des ein- und umgeschriebenen n-Ecks.

Satz d. Die Fläche eines umgeschriebenen $2n$-Ecks ist das harmonische Mittel zwischen den Flächen des umgeschriebenen n-Ecks und des eingeschriebenen $2n$-Ecks.

Erkl. 390. Uebersichtlich darstellen lässt sich der Inhalt dieser vier Sätze in der Form, dass man die vorkommenden Grösssen in Reihen ordnet:

In der Reihe $U_n u_n U_{2n} u_{2n} U_{4n} u_{4n} U_{8n} u_{8n} \cdots$ ist (a) jedes U das harmonische, (b) jedes u das geometrische Mittel der beiden vorherstehenden Grössen.

In der Reihe $f_n F_n f_{2n} F_{2n} f_{4n} F_{4n} f_{8n} F_{8n} \cdots$ ist (c) jedes f das geometrische, (d) jedes F das harmonische Mittel der beiden vorherstehenden Grössen.

Man kann demnach aus den zwei ersten Grössen jeder Reihe nach (a) bezw. (c) die dritte, daraus nach (b) bezw. (d) die vierte, dann wieder nach (a) und (c) die fünfte, u. s. w. alle aufeinanderfolgenden Grössen berechnen.

Aufgabe 27. Man soll den Wurzelausdruck:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$$

auf andere Form bringen.

Auflösung. Setzt man:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = x$$
$$\sqrt{a-\sqrt{b}} = y,$$

so wird durch Quadrierung bezw. Multiplikation:

$$x^2 = a + \sqrt{b}$$
$$y^2 = a - \sqrt{b}$$
$$x^2 + y^2 = 2a;$$

$$xy = \sqrt{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})}$$
$$xy = \sqrt{a^2 - b}$$
$$2xy = 2\sqrt{a^2 - b}.$$

Durch Zusammenfassung entsteht:

$$x^2 \pm 2xy + y^2 = 2a \pm 2\sqrt{a^2 - b},$$

also durch Radicieren:

$$x + y = \sqrt{2(a + \sqrt{a^2 - b})}$$
$$= \sqrt{a+\sqrt{b}} + \sqrt{a-\sqrt{b}},$$
$$x - y = \sqrt{2(a - \sqrt{a^2 - b})}$$
$$= \sqrt{a+\sqrt{b}} - \sqrt{a-\sqrt{b}}.$$

Und nun durch Addition bezw. Subtraktion:

$$x = \sqrt{a+\sqrt{b}}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{2(a+\sqrt{a^2-b})} + \sqrt{2(a-\sqrt{a^2-b})}\right)$$
$$= \sqrt{\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-b})} + \sqrt{\frac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-b})},$$
$$y = \sqrt{a-\sqrt{b}}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-b})} - \sqrt{\frac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-b})}.$$

Erkl. 391. Der nebenstehende Beweis kann auch so geführt werden, dass man den Ausdruck:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} \pm \sqrt{a-\sqrt{b}}$$

der Quadratwurzel aus seinem eigenen Quadrate gleichsetzt, nämlich gleich:

$$\sqrt{a+\sqrt{b} \pm 2\sqrt{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})} + a - \sqrt{b}}$$
$$= \sqrt{2(a \pm \sqrt{a^2-b})},$$

und weiter wie unten.

Erkl. 392. Wendet man die entstehenden Formeln an auf die Wurzelausdrücke der Vielecke von 3 bis 12 Ecken, so zeigen sich dieselben als wertlos, wo $a^2 - b$ kein vollständiges Quadrat ist, also bei s_5, f_5, S_5; s_8, ϱ_8; ϱ_{10}, f_{10}, S_{10}; dagegen als verwendbar, wo $a^2 - b$ ein vollständiges Quadrat ist, also bei ϱ_5, S_8, s_{12}, ϱ_{12}, S_{12}. Man erhält nämlich:

$$\varrho_5 = \frac{r}{4}\sqrt{6+2\sqrt{5}} = \frac{r}{4}\left[\sqrt{\frac{1}{2}(6+\sqrt{16})}+\sqrt{\frac{1}{2}(6-\sqrt{16})}\right]$$
$$= \frac{r}{4}\left[\sqrt{\frac{1}{2}\cdot 10}+\sqrt{\frac{1}{2}\cdot 2}\right] = \frac{r}{4}(\sqrt{5}+1)$$
$$S_8 = 2r\sqrt{3-2\sqrt{2}} = 2r\sqrt{3-\sqrt{8}} = 2r\left[\sqrt{\frac{1}{2}(3+\sqrt{1})}-\sqrt{\frac{1}{2}(3-\sqrt{1})}\right]$$
$$= 2r\left[\sqrt{\frac{1}{2}\cdot 4}-\sqrt{\frac{1}{2}\cdot 2}\right] = 2r(\sqrt{2}-1)$$
$$s_{12} = r\sqrt{2-\sqrt{3}} = r\left[\sqrt{\frac{1}{2}(2+\sqrt{1})}-\sqrt{\frac{1}{2}(2-\sqrt{1})}\right] = r\left[\sqrt{\frac{1}{2}\cdot 3}-\sqrt{\frac{1}{2}\cdot 1}\right]$$
$$= r\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{r}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2}) = \frac{r\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)$$
$$\varrho_{12} = \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{r}{2}\left[\sqrt{\frac{1}{2}(2+\sqrt{1})}+\sqrt{\frac{1}{2}(2-\sqrt{1})}\right] = \frac{r}{2}\left[\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right]$$
$$= \frac{r}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}) = \frac{r\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$$
$$S_{12} = 2r\sqrt{7-4\sqrt{3}} = 2r\left[\sqrt{\frac{1}{2}(7+\sqrt{1})}-\sqrt{\frac{1}{2}(7-\sqrt{1})}\right] = 2r[\sqrt{4}-\sqrt{3}]$$
$$= 2r(2-\sqrt{3}).$$

Erkl. 392a. Für s_{10} kann durch umgekehrte Rechnungsweise die Wurzel des eigenen Quadrats gesetzt werden:

$$s_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1) = \frac{r}{2}\sqrt{(5-2\sqrt{5}+1)} = \frac{r}{2}\sqrt{6-2\sqrt{5}}.$$

(Vergl. oben ϱ_5 mit Zeichenumstellung.) Dieselbe Rechnungsart liefert bei obigen Beispielen die Probe auf ihre Richtigkeit, indem:

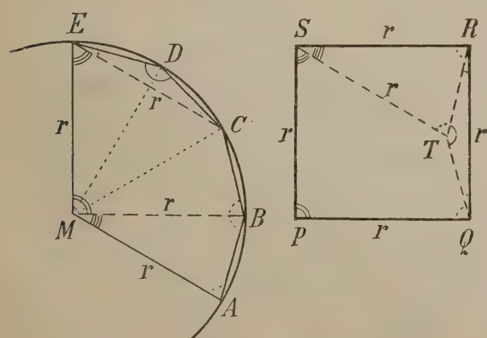
$$(\sqrt{2}-1)^2 = 3-2\sqrt{2};\quad (\sqrt{6}\pm\sqrt{2})^2 = 8\pm 2\sqrt{12} = 4(2\pm\sqrt{3});$$
$$(2-\sqrt{3})^2 = 7-4\sqrt{3}.$$

Aufgabe 28. Man soll die Formel:

$$f_{12} = 3r^2$$

geometrisch bestätigen.

Figur 106.



Erkl. 393. Nach Satz 92 des III. Teiles dieses Lehrbuches sind zwei Vierecke kongruent, „wenn drei Seiten und die beiden von ihnen eingeschlossenen Winkel im einen Viereck ebenso gross sind als entsprechende drei Seiten und

Auflösung. Ist in Figur 106:

$$\sphericalangle AMB = BMC$$
$$= CMD = DME = 30^0 = \frac{360^0}{12},$$

so ist das Vieleck $ABCDEM$ der dritte Teil eines regelmässigen Zwölfecks. Zerlegt man dasselbe durch MB und CE in drei Flächenstücke, so ist:

AMB ein gleichschenkliges Dreieck mit Winkeln 30^0, 75^0, 75^0, Schenkel r, Grundseite s_{12};

CDE ein gleichschenkliges Dreieck mit Winkeln 150^0, 15^0, 15^0, Schenkel s_{12}, Grundseite $s_6 = r$;

$BMEC$ ein Viereck mit Seiten und Winkeln (von B angefangen) r, 90^0, r, 60^0, r, 135^0, s_{12}, 75^0.

Zeichnet man ferner mit Seite r ein Quadrat $PQRS$ und trägt etwa an RS ein gleichschenkliges Dreieck mit Schenkel r und Winkel an der Spitze gleich 30^0 an, so wird offenbar:

$$\triangle RST \cong BMA.$$

die beiden gleichliegenden eingeschlossenen Winkel im andern Vierecke. Nun wird Dreieck MAB geradezu durch Konstruktion als STR in das Quadrat $PQRS$ hineingelegt; die Kongruenz von $MBCE$ mit $PQTS$ wird dann durch obigen Satz erwiesen; und dadurch erhält man wieder die Bestimmungsstücke für die Kongruenz der Dreiecke CDE und RTQ.

Erkl. 394. Es ist eine häufige Erscheinung in der gesamten Mathematik, dass manche Ergebnisse auf dem Wege der gewöhnlich dafür gebrauchten Methoden nach Durchrechnung umständlicher Operationen in einer sehr einfachen Form am Schlusse erscheinen. Dann regt sich stets die Vermutung, dass dieses einfache Resultat auch auf anderem — einfacherem Wege sich finden lassen müsse. Und ein solches Beispiel bildet die nebenstehende Aufgabe.

Erkl. 395. Wie nebenstehend fürs 12-Eck, so sind Bestätigungen der Flächenformeln aufgestellt fürs Dreieck in Erkl. 63, Viereck in Erkl. 64, Sechseck in Erkl. 60. Im letzteren Falle kann auch die Formel:

$$f_{2n} = \frac{n}{2} r s_n$$

Bestätigung finden durch Zerlegung mittels zweier parallelen Diagonalen, deren jede s_3 ist. Das Rechteck ist $r \cdot s_3$, die Höhe eines der beiden gleichschenkligen Dreiecke $\frac{r}{2}$, also:

$$f_6 = r \cdot s_3 + 2 \cdot \frac{s_3}{2} \cdot \frac{r}{2} = r s_3 \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} r s_3 = \frac{3}{2} r^2 \sqrt{3}.$$

Verbindet man nun noch Q mit T, so wird $QPST$ ein Viereck mit Seiten und Winkeln (von Q angefangeu) r, 90^0, r, 60^0, $r \cdots$ Demnach stimmt das Viereck $QPST$ mit dem Viereck $BMEC$ überein in drei Seiten und in zwei eingeschlossenen Winkeln, so dass:

$$QPST \cong BMEC,$$

also auch:

$$QT = BC = BA = TR = s_{12}.$$

Folglich ist endlich auch $\triangle QRT$ ein gleichschenkliges Dreick mit Seiten r, s_{12}, s_{12}, also:

$$\triangle QRT \cong ECD.$$

Hiernach bestehen das Quadrat $PQRS$ und das Vieleck $ABCDEM$ aus drei je entsprechend kongruenten Flächenstücken, so dass:

$$ABCDEM = PQRS = r^2.$$

Nun ist aber $ABCDEM$ der dritte Teil eines regulären Zwölfecks, also ist das ganze Zwölfeck $= 3 \cdot r^2$.

Aufgabe 29. Man berechne den Radius des Umkreises:

α) für ein reguläres Dreieck mit gegebener Fläche $f = a^2$;

β) für ein einem Kreis mit gegebenem Radius $\varrho = a$ umgeschriebenes Quadrat;

γ) für ein reguläres Fünfeck mit gegebener Seite $s = a$;

δ) für ein reguläres Achteck mit gegebenem Umfang $u = a$.

Erkl. 396. Die vorstehenden Aufgaben enthalten nichts anderes, als die Auflösung der in der Tabelle in Antwort der Frage 33 enthaltenen Gleichungen rückwärts nach r.

Auflösung. α) Ist:

$$f_3 = \frac{3}{4} r^2 \sqrt{3} = a^2,$$

so muss:

$$r^2 = \frac{4a^2}{3\sqrt{3}},$$

$$r = 2a\sqrt{\frac{1}{3\sqrt{3}}} = 2a\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3 \cdot 3}} = \frac{2}{3} a \sqrt[4]{3}.$$

β) Ist:

$$\varrho_4 = \frac{r}{2}\sqrt{2} = a,$$

so ist:

$$r = \frac{2a}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}.$$

γ) Ist:

$$s_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = a,$$

so ist:

$$r = \frac{2a}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} = \frac{2a\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{100 - 20}} = \frac{2a\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4\sqrt{5}} = \frac{a}{10}\sqrt{50 + 10\sqrt{5}}.$$

δ) Ist:

$$u_8 = 8r\sqrt{2-\sqrt{2}} = a,$$

so ist:

$$r = \frac{a}{8\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{a\sqrt{2+\sqrt{2}}}{8\sqrt{2}} = \frac{a}{16}\sqrt{4+2\sqrt{2}} = \frac{a}{8}\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{2}}}.$$

Aufgabe 30. Man berechne den Radius des Inkreises:

α) für ein reguläres Sechseck mit gegegebener Seite $= a$;

β) für ein reguläres Zehneck mit gegebener Fläche $= a^2$.

γ) für ein einem Kreis mit gegebenem Radius $r = a$ eingeschriebenes Zwölfeck;

δ) für ein reguläres Achteck mit gegebenem Umfang a.

Auflösung. α) Ist:

$$S_6 = \frac{2}{3}r\sqrt{3} = a,$$

so ist:

$$r = \frac{3a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

β) Ist:

$$F_{10} = 2r^2\sqrt{25-10\sqrt{5}} = a^2,$$

so ist:

$$r^2 = \frac{a^2}{2\sqrt{25-10\sqrt{5}}} = \frac{a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{2\sqrt{125}}$$

$$= \frac{a^2}{10}\sqrt{5+2\sqrt{5}} = \frac{a^2}{10}\sqrt{\frac{500+200\sqrt{5}}{100}}$$

also:

$$r = \frac{a}{10}\sqrt[4]{500+200\sqrt{5}}.$$

γ) Ist:

$$r = a,$$

so ist:

$$\varrho_{12} = \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{a}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

δ) Ist:

$$U_8 = 16r\sqrt{3-2\sqrt{2}} = a,$$

so ist:

$$r = \frac{a}{16\sqrt{3-2\sqrt{2}}} = \frac{a}{16}\sqrt{3+2\sqrt{2}}.$$

Erkl. 397. In vorstehender Aufgabe wird stets ϱ gesucht; das kann entweder, wie in γ, direkt geschehen oder durch Anwendung der Formeln für S, U, F. Die erste Aufgabe lässt beide Lösungen zu, nämlich ausser der nebenstehenden auch:

$$\varrho_6 = \frac{r}{2}\sqrt{3} = \frac{s}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

Aufgabe 31. Man berechne:

α) die Fläche eines regulären Achtecks mit gegebener Seite a;

β) die Seite eines regulären Fünfecks mit gegebener Fläche a^2.

Auflösung. α) Ist:

$$s_8 = a,$$

so berechnet man erst r, dann aus r nachträglich:

$$f_8 = 2r^2\sqrt{2}.$$

$$a = s_8 = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

gibt:

$$r = \frac{a}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{a\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{a}{2}\sqrt{4+2\sqrt{2}}.$$

Hieraus:

Erkl. 398. Man kann nebenstehende Aufgabe auch in der Art rechnen, dass man die Grösse a erst zuletzt einsetzt, also:

$$\alpha)\ s_8 = r\sqrt{2-\sqrt{2}}, \quad r = \frac{s}{\sqrt{2-\sqrt{2}}},$$

$$f = 2r^2\sqrt{2} = \frac{s^2\cdot 2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{s^2\cdot 2\sqrt{2}(2+\sqrt{2})}{4-2}$$

$$= s^2(2+2\sqrt{2});$$

und jetzt wird $s = a$ gesetzt, also:

$$f_8 = 2a^2(1+\sqrt{2}).$$

β) $f_5 = \frac{5}{8} r^2 \sqrt{10+2\sqrt{5}},$

$$r^2 = \frac{8f}{5\sqrt{10+2\sqrt{5}}};$$

$$s_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$
$$= \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}\cdot\sqrt{\frac{8f}{5\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}$$
$$= \sqrt{\frac{(10-2\sqrt{5})\cdot 8f\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4\cdot 5(10+2\sqrt{5})}}$$
$$= \sqrt{\frac{2f(10-2\sqrt{5})^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{5(100-20)}}$$
$$= \frac{1}{20}\sqrt{2f\sqrt{(120-40\sqrt{5})^2(10+2\sqrt{5})}}$$
$$= \frac{1}{20}\sqrt{2f\sqrt{40^2\cdot 2(3-\sqrt{5})^2(5+\sqrt{5})}}$$
$$= \frac{1}{20}\sqrt{2\cdot 40f\sqrt{2(14-6\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}}$$
$$= \frac{1}{5}\sqrt{f\sqrt{100(7-3\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}}$$
$$= \frac{\sqrt{f}}{5}\sqrt[4]{100(20-8\sqrt{5})}$$
$$= \frac{\sqrt{f}}{5}\sqrt[4]{2000-800\sqrt{5}}$$
$$= \frac{2}{5}\sqrt{f}\sqrt[4]{125-50\sqrt{5}};$$

also muss:

$$s_5 = \frac{2a}{5}\sqrt[4]{125-50\sqrt{5}}.$$

$$f_8 = 2\left(\frac{a\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2}\right)^2\cdot\sqrt{2}$$
$$= \frac{a^2}{2}\sqrt{2}\,[2(2+\sqrt{2})]$$
$$= a^2(2+\sqrt{2})\sqrt{2} = a^2(2\sqrt{2}+2)$$
$$= 2a^2(1+\sqrt{2}).$$

β) Ist $f_5 = a^2$, so ist erst r zu berechnen, dann aus r nachträglich:

$$s_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

$$f_5 = a^2 = \frac{5}{8}r^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

gibt:

$$r^2 = \frac{8a^2}{5\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \frac{8a^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{5\sqrt{80}}$$
$$= \frac{8a^2\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{5\cdot 4\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{2a^2}{25}\sqrt{50-10\sqrt{5}}$$
$$= \frac{a^2}{25}\sqrt{200-40\sqrt{5}},$$

also:

$$r = \frac{a}{5}\sqrt[4]{200-40\sqrt{5}};$$

und

$$s_5 = \frac{a}{10}\sqrt[4]{200-40\sqrt{5}}\cdot\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$
$$= \frac{a}{10}\sqrt[4]{4(50-10\sqrt{5})2^2(5-\sqrt{5})^2}$$
$$= \frac{a}{5}\sqrt[4]{(50-10\sqrt{5})(30-10\sqrt{5})}$$
$$= \frac{a}{5}\sqrt[4]{2000-800\sqrt{5}}$$
$$= \frac{2a}{5}\sqrt[4]{125-50\sqrt{5}}.$$

Aufgabe 32. Man soll die Elemente der Vielecke von $4n$, $8n$, $\cdots$ Ecken unmittelbar aus jenen des n-Ecks ableiten.

Erkl. 399. Ein Vergleich nebenstehenden Ergebnisses mit dem Inhalt der Erkl. 86 zeigt die Uebereinstimmung dieser allgemeinen Formeln mit jenen besonderen: Die Grösse $\left(\frac{s_n}{r}\right)^2$, welche im innersten Radikanden auftritt, ist fürs Sechseck 1, fürs Viereck 2, fürs Zehneck:

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Die Grösse:

Auflösung. Da:

$$s_{2n} = r\sqrt{2-\sqrt{4-\left(\frac{s_n}{r}\right)^2}},$$

so ist:

$$s_{4n} = r\sqrt{2-\sqrt{4-\left(\frac{s_{2n}}{r}\right)^2}},$$

also:

$$s_{4n} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{4-\left(\frac{s_n}{r}\right)^2}}}$$

$$\sqrt{4-\left(\frac{s_n}{r}\right)^2}$$

wird daher für die Dreiecksreihe $\sqrt{3}=\frac{s_3}{r}$, für die Zweiecksreihe $\sqrt{2}=\frac{s_4}{r}$, für die Fünfecksreihe:

$$4-\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\frac{8-3+\sqrt{5}}{2}=\frac{5+\sqrt{5}}{2}=\frac{s_5}{r}.$$

Ebenso wird:

$$s_{8n}=r\sqrt{2-\sqrt{4-\left(\frac{s_{4n}}{r}\right)^2}},$$

also:

$$s_{8n}=r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{4-\left(\frac{s_n}{r}\right)^2}}}}.$$

Und so lässt sich weiter führen:

$$s_{16n}=r\sqrt{\underset{1}{\left[2\right.}-\sqrt{\underset{2}{\left(2\right.}+\sqrt{\underset{3}{\left[2\right.}+\sqrt{\underset{4}{\left(2\right.}+\sqrt{4-\left(\frac{s_n}{r}\right)^2}\left.\right)}\left.\right]}\left.\right)}\left.\right]}$$

und allgemein:

$$s_{2^z\cdot n}=r\sqrt{\underset{1}{\left[2\right.}-\sqrt{\underset{2}{\left(2\right.}+\sqrt{\underset{3}{\left[2\right.}+\cdots\sqrt{\underset{z-1}{\left(2\right.}+\sqrt{\underset{z}{\left\{2\right.}+\sqrt{4-\left(\frac{s_n}{r}\right)^2}\left.\right\}}\left.\right)}\cdots\left.\right]}\left.\right)}\left.\right]}.$$

Und genau ebenso lassen sich die Formeln für:

$$\varrho_{2^z\cdot n},\quad f_{2^z\cdot n},\quad S_{2^z\cdot n},\quad F_{2^z\cdot n}$$

aus jenen für s_n ableiten, indem man dieselben zurückführt auf $s_{2^z\cdot n}$.

Aufgabe 33. Wozu gelangt man durch Weiterführung der Formel:

$$s_{\frac{1}{2}n}=s_n\sqrt{4-\left(\frac{s_n}{r}\right)^2},$$

wenn n gleich 4 oder gleich einer ungeraden Zahl ist?

Erkl. 400. Während bisher s_n nur für ganze Zahlen $n>3$ definiert war als die Seite des regulären Vielecks von n Ecken, so kommt man durch nebenstehende Betrachtung zu einer neuen Definition von s_n, welche auch für jede beliebige ganze oder gebrochene Zahl n gilt, indem man nämlich s_n gleich der Sehne des $n$ten Teiles der Peripherie setzt, oder gleich der Sehne des Bogens, welcher entsteht durch Division der Peripherie durch n. In der That ist dann s_2 die Sehne des Halbkreises, also der Durchmesser; $s_{\frac{2}{2}}$, $s_{\frac{2}{4}}$, $s_{\frac{2}{8}}$ u. s. w. die Sehne des ganzen, des doppelten, vierfachen u. s. w. Kreisumfangs, also Null. Ebenso $s_{\frac{3}{2}}$ die Sehne von $\frac{2}{3}$ Peripherie, also wieder die Dreiecksseite, $s_{\frac{3}{4}}$ die Sehne von $\frac{4}{3}$ Peripherie, also dieselbe.

Erkl. 401. Beim Fünfeck (Figur 107) geht aus voriger Definition noch eine doppelte Begriffserweiterung hervor. Da nämlich $s_{\frac{5}{2}}$ die Sehne zu $\frac{2}{5}$ Peripherie bedeutet, so hat man damit den Wert einer Diagonale des re-

Auflösung. a) Ist $n=4$, also:

$$s_4=r\sqrt{2},$$

so wird:

$$s_{\frac{4}{2}}=s_2=r\sqrt{2}\sqrt{4-2}=2r=\text{Durchmesser}.$$

Ist dann $n=2$, also $s_2=2r$, so würde:

$$s_{\frac{2}{2}}=2r\sqrt{4-4}=0,$$

und ebenso von da an $s_{\frac{2}{4}}=0$, u. s. w.

b) Ist $n=3$, also $s_3=r\sqrt{3}$, so wird:

$$s_{\frac{3}{2}}=r\sqrt{3}\sqrt{4-3}=r\sqrt{3}=s_3.$$

Bildet man dann $s_{\frac{3}{4}}$, so muss wieder der Wert s_3 entstehen, und so unbegrenzt weiter stets s_3 bei jeder Halbierung.

c) Ist $n=5$, also:

$$s_5=r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}},$$

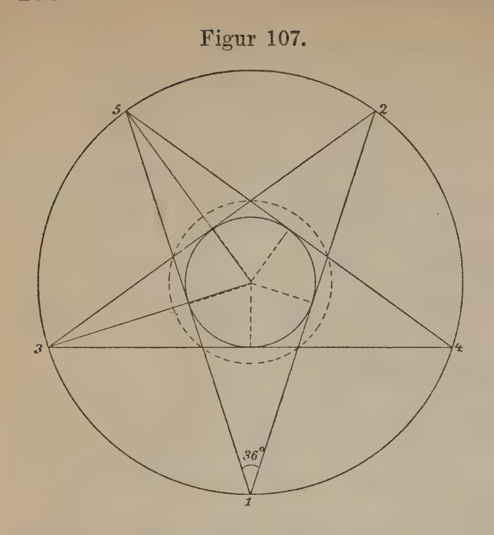
so wird:

$$s_{\frac{5}{2}}=r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\sqrt{4-\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$$

$$=\frac{r}{2}\sqrt{(5-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}$$

$$=\frac{r}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}=r\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}=2\cdot\varrho_{10}.$$

Figur 107.



Figur 108.



gulären Fünfecks im Kreise mit Radius r:

$$d_5 = r\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}},$$

oder in anderer Betrachtungsweise die Seite des regulären Sternfünfecks im Kreise mit Radius r:

$$s_5{}' = r\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{5}}.$$

Die Aufgabe 33 führt also auf die Bestimmung von Diagonalen, sowie auf die Bestimmung von Seiten der regulären Sternvielecke. Ohne weiteres ist dann klar, dass $s_{\frac{5}{4}}$ als Sehne von $\frac{4}{5}$ Peripherie $= s_5$, $s_{\frac{5}{8}}$ als Sehne von $\frac{8}{5}$ Peripherie gleich der Sehne von $\frac{3}{5}$ oder von $\frac{2}{5}$ Peripherie, u. s. w.

Bildet man dann $s_{\frac{5}{4}}$, so entsteht:

$$r\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\cdot\sqrt{4-\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$$
$$= \frac{r}{2}\sqrt{(5+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}$$
$$= \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = s_5.$$

Folglich müsste:

$$s_{\frac{5}{8}} = s_{\frac{5}{2}}, \quad s_{\frac{5}{16}} = s_5$$

werden u. s. w.

Erkl. 402. Dass im obigen sich ergibt $s_{\frac{5}{2}} = 2\cdot\varrho_{10}$, ist durch Betrachtung der Figur 108 als Einzelfall einer allgemeinen Beziehung erkennbar. Denn BC ist Grundseite des gleichschenkligen Dreiecks BCM, MD aber Halbierungslinie von dessen Aussenwinkel und von CA, also $\sphericalangle BCM = DMC$, $MD \parallel BC$, folglich MD als Mittelparallele des Dreiecks ABC gleich der halben Grundseite BC, und $BC = 2\cdot MD$. Also ist der Reihe nach:

$s_3 = 2\cdot\varrho_6$

$s_{\frac{5}{2}} = 2\cdot\varrho_{10}$; $\left(s_{\frac{6}{2}} = 2\cdot\varrho_6\right)$

$s_{\frac{7}{3}} = 2\cdot\varrho_{14}$; $s_{\frac{8}{3}} = 2\cdot\varrho_8$

$s_{\frac{9}{4}} = 2\cdot\varrho_{18}$; $\left(s_{\frac{10}{4}} = 2\cdot\varrho_{10}\right)$

$s_{\frac{11}{5}} = 2\cdot\varrho_{22}$; $s_{\frac{12}{5}} = 2\cdot\varrho_{12}$,

$s_{\frac{13}{6}} = 2\cdot\varrho_{26}$; $\left(s_{\frac{14}{6}} = 2\cdot\varrho_{14}\right)$

$s_{\frac{15}{7}} = 2\cdot\varrho_{30}$; $s_{\frac{16}{7}} = 2\cdot\varrho_{16}$.

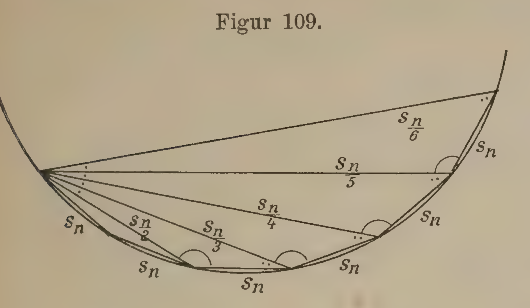
allgemein

$$s_{\frac{2n+1}{n}} = 2\cdot\varrho_{4n+2}$$

$$s_{\frac{2n+2}{n}} = 2\cdot\varrho_{2n+2}$$

Aufgabe 34. Man soll einen allgemeinen Weg suchen, um die Diagonalen der regulären n-Ecke bezw. die Seiten der regulären Sternvielecke im Kreise mit Radius r zu bestimmen:

Figur 109.



Erkl. 403. In Antwort der Frage 11 ist zu unterscheiden, ob der zu bestimmenden Seite ein oder zwei spitze Winkel anliegen. Da im vorliegenden Falle die Reihe wegen der Symmetrie nur bis zum Halbkreis durchzuführen ist, so liegt die zu bestimmende Sehne stets einem stumpfen Dreieckswinkel gegenüber, hat also zwei spitze anliegende Winkel. Daher gilt die Formel:

$$c = \frac{a\varrho_b + b\varrho_a}{r}.$$

Erkl. 404. Unter den Diagonalen eines n-Ecks befinden sich stets die Seiten derjenigen Vielecke, deren Seitenzahlen Teiler von n sind, also nur soviele andere Diagonalen, als zwischen 1 und $\frac{n}{2}$ relative Primzahlen mit n sind. Dem entspricht auch der Zusammenhang zwischen Diagonalen und Sternvielecksseiten. Ein geschlossenes Sternvieleck ist nur möglich mittels Diagonalen, die nicht Vielecksseiten sein können, es gibt also zu jeder Seitenzahl n ebenso viele verschiedene geschlossene Sternvielecke, als Diagonalen, die nicht Vielecksseiten sind, nämlich (vergl. Erkl. 226 des vierten Teiles dieses Lehrbuches):

Auflösung. Geht man von s_n aus, so ist die Diagonale zwischen zwei Punkten mit einem Zwischenpunkte die Sehne von $\frac{2}{n}$ Peripherie, also gleich $s_{\frac{n}{2}}$. Dann ist die Diagonale zwischen zwei Punkten mit zwei Zwischenpunkten die Sehne von $\frac{3}{n}$ Peripherie. Diese ist die dritte und grösste Dreiecksseite in einem stumpfwinkligen Dreieck mit einer ersten Seite s_n, einer zweiten Seite $s_{\frac{n}{2}}$ und Umkreisradius r. Folglich kann $s_{\frac{n}{3}}$ berechnet werden nach der Bestimmungsgleichung in Antwort der Frage 11.

Die Diagonale zwischen zwei Eckpunkten mit drei Zwischenpunkten ist die Sehne von $\frac{4}{n}$ Peripherie, wird also bestimmt entweder als $s_{\frac{n}{4}}$, oder als grösste Seite des stumpfwinkligen Dreiecks mit zwei Seiten s_n, $s_{\frac{n}{3}}$ und Radius r (Figur 109).

Ebenso ist $s_{\frac{n}{5}}$ grösste Seite des Dreiecks mit Seiten s_n, $s_{\frac{n}{4}}$ und Radius r, oder mit Seiten $s_{\frac{n}{2}}$, $s_{\frac{n}{3}}$ und Radius r;

$s_{\frac{n}{6}}$ grösste Seite des Dreiecks mit Seiten s_n, $s_{\frac{n}{5}}$ und Radius r; oder $s_{\frac{n}{2}}$ und $s_{\frac{n}{4}}$, oder $s_{\frac{n}{3}}$ und $s_{\frac{n}{3}}$ u. s. w.

Reguläres n-Eck:	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Verschiedene Diagonalgrössen, die nicht Vielecksseiten:	0	0	1	0	2	1	2	1	4	1	5	2	3	3	7	2	8	3	5	4	10	3	9	5	8	5	13	3	14	7

Aufgabe 35. Man soll die Stücke aufstellen, welche an den einfachsten Vielecken nach voriger Aufgabe elementar zu bestimmen sind.

Erkl. 405. Die vorliegende Aufgabe liefert die allgemeine Bestimmung der Seiten der regulären Sternvielecke, oder was dasselbe

Auflösung. Da beim Dreieck, Viereck, Sechseck keine neuen Diagonalgrössen auftreten, beim Fünfeck die einzige schon in Erkl. 401 bestimmt ist, so bleiben übrig je die einzige neue Diagonalgrösse beim Achteck $s_{\frac{8}{3}}$, Zehneck $s_{\frac{10}{3}}$, Zwölfeck $s_{\frac{12}{5}}$, je drei Grössen beim 15-Eck:

ist, der verschiedenen **Diagonalgrössen** aller Vielecke, deren Seitenzahlen in der Reihe der Erkl. 101 bezw. Tabelle Seite 49 enthalten sind. Entsprechend der verschiedenen Entstehungsweise der Sehnendreiecke in voriger Auflösung ergeben sich für jede zu bestimmende Grösse verschiedene Wege, also umgekehrt für eine einmal ausgeführte Bestimmung oft auch mehrere andere zur Prüfung ihrer Richtigkeit.

$$s_{\frac{15}{2}}, \quad s_{\frac{15}{4}}, \quad s_{\frac{15}{7}},$$

beim 16-Eck:

$$s_{\frac{16}{3}}, \quad s_{\frac{16}{5}}, \quad s_{\frac{16}{7}},$$

beim 20-Eck:

$$s_{\frac{20}{3}}, \quad s_{\frac{20}{7}}, \quad s_{\frac{20}{9}},$$

beim 24-Eck:

$$s_{\frac{24}{5}}, \quad s_{\frac{24}{7}}, \quad s_{\frac{24}{11}},$$

und beim 30-Eck:

$$s_{\frac{30}{7}}, \quad s_{\frac{30}{11}}, \quad s_{\frac{30}{13}};$$

dann je 7 Grössen beim 32-Eck, 40-Eck-48-Eck u. s. w.

Aufgabe 36. Wie gross ist demnach die Seite des geschlossenen Sternachtecks im Kreise mit Radius r.

Auflösung. In der Formel:

$$c = \frac{a\varrho_b + b\varrho_a}{r}$$

wird:

$$c = d_8 = s_{\frac{8}{3}};$$

$$a = s_8, \quad \varrho_a = \varrho_8; \quad b = s_4, \quad \varrho_b = \varrho_4;$$

also:

$$s_{\frac{8}{3}} = \frac{s_8\varrho_4 + s_4\varrho_8}{r}$$

$$= \frac{1}{r}\left(r\sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot \frac{r}{2}\sqrt{2} + \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot r\sqrt{2}\right)$$

$$= \frac{r}{2}\sqrt{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{r}{2}\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}+2\sqrt{2}+2+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{r}{2}\sqrt{2}\sqrt{2(2+\sqrt{2})}$$

$$= r\sqrt{2+\sqrt{2}} = 2\cdot\varrho_8.$$

Erkl. 406. In nebenstehender Auflösung bestätigt sich:

$$s_{\frac{8}{3}} = 2\cdot\varrho_8,$$

wie in Erkl. 402 und Figur 108. Man hat damit die Seite des geschlossenen Sternachtecks, oder was dasselbe ist, die Diagonalgrösse des regulären Achtecks, welche nicht Vierecksseite oder Durchmesser ist.

---

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 37. Man bestätige den Zusammenhang von U, u, f, F fürs Dreieck und Sechseck.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 26.

Aufgabe 38. Man bestätige die Formel:

$$f_{2n} = \frac{n}{2} r s_n$$

aus der Tabelle in Antwort der Frage 33.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Erkl. 55.

Aufgabe 39. Man soll die Ausdrücke für f_{20} und f_{24} in Binome verwandeln.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 27.

Aufgabe 40. Man soll die Formel für f_8 geometrisch bestätigen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 28.

Aufgabe 41. Man berechne den Radius des Umkreises:

α) aus s_{10},
β) aus ϱ_6,
γ) aus u_3,
δ) aus f_{12}.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 29.

Aufgabe 42. Man berechne den Radius des Inkreises:

α) aus S_{12},
β) aus U_5,
γ) aus F_8.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 30.

Aufgabe 43. Man berechne:

α) S_6 aus f_6,
β) F_3 aus f_3.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 31.

Aufgabe 44. Man soll aus s_n unmittelbar ableiten:

$$\varrho_{2^z \cdot n},\quad S_{2^z \cdot n},\quad f_{2^z \cdot n},\quad F_{2^z \cdot n}.$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 32.

Aufgabe 45. Welche Bestimmungen ergeben sich aus der Formel $s_{\frac{1}{z} n}$?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 33.

Aufgabe 46. Man soll das allgemeine Glied der „rekurrierenden Reihe“ für $s_{\frac{n}{k}}$ aufstellen?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 34.

Aufgabe 47. Wie werden die Anzahlen verschiedener Diagonalgrössen fürs 40-Eck und 48-Eck bestimmt?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 34.

Aufgabe 48. Man bestimme die Seiten der Sternvielecke von 12, 15, 16 Seiten im Kreise mit Radius r.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 36.

3) Aufgaben über die Kreismessung oder Cyklometrie.

(Zu Abschnitt 3.)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 49. Man soll den Wert folgender unendlichen Reihen auf einige Decimalstellen berechnen:

1) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\cdots$ 2) $1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5+\frac{3\cdot5}{4\cdot6}\cdot\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7+\cdots$

3) $\frac{2\cdot2}{1\cdot3}\cdot\frac{4\cdot4}{3\cdot5}\cdot\frac{6\cdot6}{5\cdot7}\cdots$ 4) $\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{6^2-1}+\frac{1}{10^2-1}+\cdots$

5) $4\left[\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^7+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{5}\right)^9\cdots\right]-\left[\frac{1}{239}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{239}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{239}\right)^5\cdots\right]$

Erkl. 407. Bildung und Beurteilung von Reihen, wie der obigen, wird gelehrt in der „algebraischen Analysis“. Die Weiterführung der einzelnen ist unschwer zu finden, denn es enthält die erste alle ungeraden Zahlen reciprok mit wechselnden Zeichen; die zweite enthält ebenfalls alle ungeraden Zahlen reciprok, aber jeden Bruch multipliziert mit der gleichhohen Potenz von $\frac{1}{2}$, und ausserdem mit einem Bruch, dessen Zähler alle niedereren ungeraden, dessen Nenner alle niedereren geraden Zahlen multipliziert enthält. Die dritte Reihe enthält im Zähler der Reihe nach die Quadrate der geraden, im Nenner (um eine Stelle verschoben) die Quadrate der ungeraden Zahlen. Diese Reihe ist benannt nach ihrem Entdecker, dem englischen Mathematiker Wallis († 1703). Die vierte Reihe enthält die Reciproken der um 1 verminderten Quadrate aller geraden Zahlen, die nicht durch 4 teilbar sind; die fünfte besteht aus zwei Teilen, deren jeder ähnlich wie die zweite Reihe gebildet ist.

Auflösung. 1) Die erste Reihe ist sehr unbequem zum Rechnen (sie ist wenig konvergent), weil die Brüche sehr langsam abnehmen und erst bei $\frac{1}{11}$ eine, erst bei $\frac{1}{101}$ zwei Nullen hinter dem Komma erscheinen. Wenn man aber die Reihe sehr weit fortsetzt, so entsteht:

$$0{,}785398\cdots=\frac{\pi}{4}.$$

2) Die zweite Reihe ist schon bedeutend bequemer zu rechnen (rascher konvergent), da schon das vierte Glied ungefähr:

$$\frac{1}{1400}=0{,}0007$$

ist, also die ersten drei Dezimalen nicht mehr direkt beeinflusst. Bei weiterer Fortsetzung der Reihe entsteht:

$$1{,}047197\cdots=\frac{\pi}{3}.$$

3) Die dritte Reihe hat die Gestalt eines unendlichen Produktes und liefert:

$$1{,}570796\cdots=\frac{\pi}{2}.$$

4) Die vierte Reihe liefert:

$$0{,}392696\cdots=\frac{\pi}{8}.$$

5) Die letzte führt am raschesten zum Ziel (ist am raschesten konvergent) und gibt unter Berücksichtigung bloss der oben angeschriebenen Glieder schon auf 7 Stellen genau:

$$0{,}78539817=\frac{\pi}{4}.$$

Aufgabe 50. Wie genau erhält man die Kreislänge, wenn man dieselbe gleichsetzt:

1) $1\frac{1}{5}$ derjenigen Strecke, von welcher der Durchmesser der kleinere Abschnitt der goldenen Teilung ist?

Auflösung. Um zu beurteilen, wie genau die Kreislänge erhalten wird, berechnet man, auf wieviel Stellen genau die Zahl π bei jeder Konstruktion entsteht.

2) wenn man den Halbkreis gleichsetzt dem dreifachen Radius **plus** dem zehnten Teil der dem Kreise eingeschriebenen Quadratseite?

Erkl. 408. Aehnliche Konstruktionen, wie die vorstehenden, gibt es noch eine grosse Menge. Zum Teil kommt denselben schon ein hohes Alter zu, wie z. B. der Grösse $\frac{22}{7}$ von Archimedes. Gefunden sind dieselben meistens durch Erraten; so z. B. entspringt die zweite aus der Thatsache, dass die im Dezimalbruch für $\sqrt{2}$ vorkommende Zahlengruppe 1414 ziemlich übereinstimmt mit der im Dezimalbruch für π stehenden Gruppe 1415. Man vergleiche hierzu auch Aufgabe 56 und Erkl. 414.

1) Nach früherem (siehe Erkl. 366 des VI. Teiles dieses Lehrbuches) verhält sich bei der goldenen Teilung:

$$(a-x):x:a=(3-\sqrt{5}):(\sqrt{5}-1):2,$$

also ist, wenn $a-x=2r$ gesetzt wird:

$$a=\frac{2}{3-\sqrt{5}}\cdot 2r.$$

Damit $1\frac{1}{5}$ dieser Strecke gleich $2\pi r$ ist, müsste:

$$2\pi r=\frac{12}{5}\cdot\frac{1}{3-\sqrt{5}}\cdot 2r,$$

also würde:

$$\pi=\frac{12}{5}\cdot\frac{1}{3-\sqrt{5}}.$$

Diese Grösse aber gibt:

$$\frac{12}{5}\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{4}=\frac{3}{5}(3+2{,}236)=0{,}6\cdot 5{,}236$$
$$=3{,}1416,$$

also fast genau $=\pi$.

2) Da $s_4=r\sqrt{2}$, so ist:

$$\frac{s_4}{10}=\frac{r}{10}\sqrt{2}=r\cdot 0{,}14142,$$

also:

$$3r+\frac{s_4}{10}=r\cdot 3{,}14142.$$

Der Fehler beträgt also im ersten Falle bloss 0,0016 %, im zweiten stark das Dreifache, aber doch nur 0,0054 %.

Aufgabe 51. Man berechne:

1) den Umfang eines Kreises mit Radius 113 cm;

2) den Umfang eines Kreises mit Durchmesser 3,08 m.

Erkl. 409. Wenn die vorkommende Masszahl des Radius oder Durchmessers durch 113 bezw. 7 teilbar ist, oder wenn umgekehrt die Umfangsziffer durch 355 bezw. 22 teilbar ist, so verwendet man passend:

$$\pi=\frac{355}{113}\text{ bezw. }\pi=\frac{22}{7}.$$

Auflösung. 1) Man benützt $\pi=\frac{355}{113}$, also:

$$2\pi r=2\pi\cdot 113=\frac{2\cdot 355\cdot 113}{113}=710;$$

der Umfang beträgt 7,1 m.

2) Man benützt $\pi=\frac{22}{7}$ also:

$$\pi d=\frac{22}{7}\cdot 3{,}08=22\cdot 0{,}44=9{,}68;$$

der Umfang beträgt 9,68 m.

Aufgabe 52. Man berechne:

1) den Radius eines Kreises von 35,64 dm Umfang;

2) den Durchmesser eines halbkreisförmigen Flächenstücks von 8 m Gesamtumfang.

Erkl. 410. Radius, Durchmesser, Umfang eines Kreises sind stets in der gleichen Gattung

Auflösung. 1) $2\pi r=35{,}64$ gibt:

$$r=\frac{35{,}64}{2\pi}=\frac{17{,}82}{22}\cdot 7=7\cdot 0{,}81=5{,}67$$

Also ist der Radius des Kreises 5,67 dm.

2) Der Gesamtumfang des Flächenstücks besteht aus dem Durchmesser und der Halbkreislinie: also ist:

des Längenmasses ausgedrückt, weil π eine reine Zahl ohne Benennung ist.

$$8 = 2r + \pi r,$$

$$2r = \frac{2 \cdot 8}{\pi + 2} = \frac{16}{5{,}14} = 3{,}11.$$

Der Durchmesser beträgt also 3,11 m, die Halbkreislinie 4,89 m.

Aufgabe 53. Wie gross ist bei einem Kreise von 10 cm Radius der Bogen von:

1) 154^0, 2) $27'$, 3) $43^0\,23''$?

Erkl. 411. Für solche Fälle, wo Rechnungen der nebenstehenden Art häufig nötig werden, benutzt man die den meisten Logarithmentafeln beigegebenen Tabellen:

„Länge der Kreisbogen für den Radius 1“. Dieselben sind nichts anderes als Multiplikationstafeln der Werte:

$$\frac{\pi}{180} = 0{,}0174533$$

für die Grade, bezüglich:

$$\frac{\pi}{180 \cdot 60} = 0{,}0002909$$

für die Minuten, und

$$\frac{\pi}{180 \cdot 60 \cdot 60} = 0{,}000004848$$

für die Sekunden.

Auflösung.

1) $\frac{\pi r}{180^0} \cdot \alpha^0 = \frac{\pi}{180^0} \cdot 154^0 \cdot r$

$= 0{,}0174533 \cdot 154 \cdot r = 2{,}687807 \cdot r,$

also hat der Bogen 26,87807 cm Länge.

2) $\frac{\pi r}{180 \cdot 60'} \cdot \alpha' = \frac{\pi}{180 \cdot 60'} \cdot 27' \cdot r.$

$= 0{,}0002909 \cdot r = 0{,}007864 \cdot r,$

also hat der Bogen 0,07854 cm Länge.

3) $\frac{\pi}{180^0} \cdot 43^0 \cdot r + \frac{\pi}{180 \cdot 60 \cdot 60''} \cdot 23'' \cdot r$

$= 0{,}7504916\,r + 0{,}0001115\,r = 0{,}7506031\,r;$

also 7,506031 cm Länge.

Aufgabe 54. Wie gross ist der Radius eines Kreises, wenn ein Faden von 10 cm Länge:

1) seinen Quadranten,

2) 17 Bogengrade,

3) 9 Bogengrade und 17 Bogenminuten

überspannt?

Erkl. 412. Je kleiner in Graden der Bogen ist, der gleich einer bestimmten Länge ist, desto grösser muss der ganze Kreis, also auch dessen Radius sein. Zur Erleichterung der Rechnung kann man wieder obengenannte Tafeln benutzen, um den Nenner auszuwerten.

Auflösung.

1) $10 = \frac{\pi r}{180} \cdot 90,$

also:

$$r = \frac{10 \cdot 2}{\pi} = 6{,}366,$$

rund $6\frac{11}{30}$ cm.

2) $10 = \frac{\pi r}{180} \cdot 17;$

$$r = \frac{10 \cdot 180}{17 \cdot \pi} = \frac{10}{0{,}2967} = 34{,}04,$$

also 34 cm.

3) $10 = \frac{\pi r}{180 \cdot 60}(9 \cdot 60 + 17);$

$$r = \frac{10 \cdot 180 \cdot 60}{\pi \cdot 557} = \frac{10}{0{,}162} = 91{,}73.$$

also $61\frac{3}{4}$ cm.

Aufgabe 55. Wieviel Bogengrade werden bei einem Kreise von 10 cm Radius überspannt durch:

1) 8 cm, 2) 2,432 dm. 3) 1 mm?

Auflösung.

1) $\alpha = \frac{8 \cdot 180^0}{\pi r} = \frac{8 \cdot 180^0}{\pi \cdot 10} = \frac{144^0}{\pi} = 45{,}84^0,$

also $45^0\,50'$.

$$2)\ \alpha = \frac{24{,}32 \cdot 180^0}{\pi \cdot 10} = \frac{2{,}432^0}{0{,}01745} = 139{,}47^0,$$

also $139^0\,28'$.

$$3)\ \alpha = \frac{1 \cdot 180 \cdot 60'}{\pi \cdot 100} = \frac{1'}{0{,}029} = 34{,}83',$$

also ungefähr $\frac{1}{2}$ Grad.

Erkl. 413. Zu mehrfachen und genaueren Rechnungen nebenstehender Art würde man wieder die obengenannten Tafeln benutzen, aber in umgekehrter Richtung, z. B. für die erste Frage obiger Aufgabe:

Gegebener Bogen	0,8	
Gefundener Bogen	0,785398 ···	entspricht 45^0
Restbogen	0,014602	
Gefundener Bogen	0,014544 ···	entspricht $50'$
Restbogen	0,000058	
Gefundener Bogen	0,000058 ···	entspricht $12''$

also hat der Bogen von 8 cm einen Centriwinkel von $45^0\,50'\,12''$.

Aufgabe 56. Wie genau erhält man die Kreisfläche, wenn man dieselbe gleichsetzt:

1) dem Quadrat von $1\frac{7}{9}$ Radius Seite;

2) dem Hypotenusenquadrat eines rechtwinkligen Dreiecks mit Katheten $1\frac{3}{4}r$ und $\frac{9}{32}r$?

Erkl. 414. Die erste Angabe ist die schon in Erkl. 117 erwähnte altindische Konstruktionsvorschrift. — Weitere Lösungen entstehen aus denen der Aufgabe 50, indem man über jenen Längen ein Dreieck von Höhe r oder ein Rechteck von Höhe $\frac{r}{2}$ errichtet. Dessen Fläche ist dann:

$$2\pi r \cdot \frac{r}{2} = r^2\pi.$$

Umgekehrt kann aus Nebenstehendem die Kreislänge konstruiert werden, wenn man das Quadrat verwandelt in ein Rechteck von Höhe $\frac{r}{2}$. Die zweite Seite dieses Rechtecks wird dann $2\pi r$.

Auflösung. 1) Man berechnet, wie genau jedesmal die Zahl π entsteht. Also zunächst:

$$r^2\pi = r^2 \cdot \left(\frac{16}{9}\right)^2 = r^2 \cdot \frac{256}{81} = r^2 \cdot 3{,}1605.$$

$$2)\ r^2\pi = \left(\frac{7}{4}r\right)^2 + \left(\frac{9}{32}r\right)^2$$
$$= \frac{49}{16}r^2 + \frac{81}{1024}r^2 = \frac{3136+81}{1024}r^2$$
$$= \frac{3217}{1024}r^2 = r^2 \cdot 3{,}141602.$$

Der Fehler beträgt also im ersten Falle $\frac{3}{5}$ %, im zweiten Falle aber nur 0,000318 %.

Aufgabe 57. Der Minutenzeiger einer Uhr habe 4,5 m Länge, welche Fläche hat das Zifferblatt, und welchen Weg macht die Zeigerspitze täglich?

Erkl. 415. Das obige Beispiel ist thatsächlich vorhanden an der Turmuhr der Peterskirche in Zürich.

Auflösung. Die Fläche ist:

$$\pi r^2 = \pi \cdot \frac{81}{4} = 63{,}068 \text{ qm},$$

der Weg in einer Stunde:

$$2\pi r = 9\pi = 28{,}27 \text{ m},$$

in zwölf Stunden 219,24 m, in einem Tag 438,48 m, fast einen halben Kilometer.

Aufgabe 58. Welchen Durchmesser müsste ein Kreis haben, auf dessen Fläche sämtliche Menschen der Erde mit je $\frac{1}{2}$ qm Flächenraum Aufstellung finden könnten?

Auflösung. Die Zahl aller Menschen zu rund $1\frac{1}{2}$ Milliarden annehmend, erhält man eine Fläche von:

Erkl. 416. Hat man eine grössere Zahl gleichartiger Aufgaben zu lösen, so kehrt der Ausdruck:

$$2\cdot\sqrt{\frac{1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4}{\pi}} = 1{,}128379$$

regelmässig wieder. Man thut also gut, denselben herauszuheben und für alle Aufgaben einmal zu rechnen.

$$1\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\,000\,000\,000 \text{ qm} = \frac{3000}{4} \text{ qkm};$$

setzt man also $r^2\pi = 750$, so wird:

$$2r = 2\sqrt{\frac{750}{\pi}} = 27{,}386\cdot\sqrt{\frac{4}{\pi}} = 30{,}9.$$

Also braucht der Durchmesser dieses Kreises nicht ganz 31 Kilometer (6 Marschstunden) zu haben.

Aufgabe 59. Wie verhalten sich Umfang und Fläche zweier Kreise, deren Radien sich verhalten wie $1:n$ oder $m:1$ oder $m:n$?

Erkl. 417. In Worten ergibt nebenstehende Auflösung folgenden Satz:

Satz. Die Umfänge zweier Kreise verhalten sich wie ihre Radien, die Flächen zweier Kreise verhalten sich wie die Quadrate der Radien.

Der Beweis ist im nebenstehenden auf algebraischem Wege geführt. Der geometrische Beweis ist erst mittels der Aehnlichkeit der Kreise durchführhar, wie gezeigt ist durch Antwort der Frage 54 im 4. Abschnitt dieses Teiles.

Auflösung. 1) Ist $r_1 : r_2 = 1 : n$, so ist $r_2 = n\cdot r_1$, also:

$$2\pi r_2 = n\cdot 2\pi r_1, \quad \pi r_2{}^2 = n^2\cdot\pi r_1{}^2,$$

oder:

$$u_2 = n\cdot u_1, \qquad f_2 = n^2\cdot f_1.$$

2) Ist $r_1 : r_2 = m : 1$, so ist umgekehrt:

$$u_2 = \frac{1}{n}\,u_1, \quad f_2 = \frac{1}{n^2}\cdot f_1.$$

3) Ist $r_1 : r_2 = m : n$, so ist:

$$u_1 : u_2 = m : n, \quad f_1 : f_2 = m^2 : n^2.$$

Aufgabe 60. Wie gross ist bei einem Kreise von 10 m Radius ein Kreisausschnitt mit Centriwinkel:

1) 132^0, 2) $48''$, 3) $51^0\,45'\,32''$?

Erkl. 418. Durch Heraushebung des Faktors $\frac{\pi}{180}$ kann auch zu den nebenstehenden Rechnungen die Tafel der Kreisbogen für Radius 1 benutzt werden.

Auflösung.

1) $$\frac{\pi r^2}{360^0}\cdot 132^0 = \frac{\pi}{180}\cdot r^2\cdot 66 = 6600\cdot 0{,}01745 = 115{,}19 \text{ qm}.$$

2) $$\frac{\pi r^2}{360\cdot 60\cdot 60''}\cdot 48'' = \frac{\pi r^2}{170\cdot 60\cdot 60''}\cdot 24'' = 2400\cdot 0{,}0000048 = 0{,}0116 \text{ qm} = 116 \text{ qcm}.$$

3) $$\frac{\pi r^2}{360^0}\cdot 51^0\,45'\,32'' = \frac{\pi r^2}{360^0}\cdot 51{,}7588\cdots = \frac{\pi r^2}{180^0}\cdot 25{,}8794\cdots = \frac{\pi}{180^0}\cdot 2587{,}94 = 45{,}168 \text{ qm}.$$

Aufgabe 61. Wie gross ist der Radius eines Kreises, wenn die Fläche von 10 qdm einen Sektor bildet von Centriwinkel:

1) 53^0, 2) $27''$, 3) $112^0\,43'\,19''$?

Erkl. 419. Für nebenstehende Rechnungen vergleiche man Erkl. 416 und 412. Während aber in letzterer der Radius dem reciproken Bogen selbst proportional ist, ist hier der Radius dem Quadrate des reciproken Bogens proportional.

Man sagt dafür auch, der Radius sei „umgekehrt proportional“: im ersten Falle dem Bogen, im zweiten Falle dem Quadrate der Bogenlänge.

Auflösung.

1) $$10 = \frac{\pi r^2}{360^0}\cdot 53^0$$

gibt:

$$r = \sqrt{\frac{10\cdot 360}{53\pi}} = \frac{30}{\sqrt{53}}\cdot\sqrt{\frac{4}{\pi}} = \frac{33{,}85}{7{,}28} = 4{,}7 \text{dm}.$$

2) $$10 = \frac{\pi r^2}{360\cdot 60\cdot 60''}\cdot 27''$$

gibt:

$$r = \sqrt{\frac{3600\cdot 60^2}{27\pi}} = \frac{600}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{4}{\pi}} = \frac{677{,}03}{1{,}732} = 391 \text{ dm} = 39{,}1 \text{ m}.$$

3) $10 = \frac{\pi r^2}{360^0} \cdot 112^0 43' 19'' = \frac{\pi r^2}{360^0} \cdot 112{,}7219$ gibt:

$$r = \sqrt{\frac{3600}{\pi \cdot 112{,}72}} = \frac{30}{\sqrt{112{,}72}} \sqrt{\frac{4}{\pi}} = \frac{33{,}85}{10{,}61},$$

also 3,2 dm.

Aufgabe 62. Wieviel Grad Centriwinkel hat bei einem Kreise von 10 m Radius ein Sektor, dessen Fläche gleich ist:

1) 200 qm, 2) 130 qcm, 3) 354 qdm?

Erkl. 420. Der Radius muss im gleichnamigen Längenmass eingesetzt werden, wie das Flächenmass des Sektors. Durch Heraushebung des Faktors $\frac{180}{\pi}$ kann man wieder die Tafeln benutzen, z. B.:

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}07080 \\ \underline{\quad 06981 \cdots 4^0} \\ 0{,}00099 \\ \underline{0{,}00087 \cdots 3'} \\ 0{,}00012 \cdots 25'' \end{array}\right\} \text{also } 4^0\, 3'\, 25''.$$

Auflösung.

1) $\alpha = \frac{360}{r^2 \pi} \cdot 200 \text{ qm} = \frac{180^0}{\pi} \cdot \frac{400}{100} = \frac{4^0}{0{,}017}$
$= 229^0\, 11'.$

2) $\alpha = \frac{360}{r^2 \pi} \cdot 130 \text{ qcm} = \frac{180^0}{\pi} \cdot \frac{260}{1000000}$
$= 0{,}00026^0 : 0{,}017 = 54''.$

3) $\alpha = \frac{360}{r^2 \pi} \cdot 354 \text{ qdm} = \frac{180^0}{\pi} \cdot \frac{708}{10000}$
$= 0{,}0708^0 : 0{,}017 = 4^0\, 3'\, 25''.$

Aufgabe 63. Man bestimme Umfang und Inhalt der zwischen je einer Seite des regulären Achtecks und dem Umkreis liegenden Flächenstücke, wenn $r = 2$ dm. (Vergleiche Figur 25, Seite 34.)

Erkl. 421. Die Elementarplanimetrie kann nur solche Segmente bestimmen, deren Centriwinkel zu den elementar bestimmbaren Polygonen gehören. Man muss sich also auf solche Segmente beschränken, bei denen die Beziehungen zwischen r, s, ϱ aus der Tabelle in Antwort der Frage 33 entnommen werden können.

Auflösung. Der Umfang eines solchen Flächenstücks besteht aus der Achtecksseite s_8 und dem Bogenstücke, welches $\frac{1}{8}$ der Peripherie ist, also hat man:

$$u = s_8 + \frac{2\pi r}{8} = r\sqrt{2 - \sqrt{2}} + \frac{\pi r}{4}$$

$$= 2\sqrt{0{,}58579} + \frac{\pi}{2}, \text{ also } 3{,}10151 \text{ dm.}$$

Der Flächeninhalt ist Sektor minus Dreieck. Ersterer ist $\frac{1}{8}$ der Kreisfläche, letzterer $\frac{s_8 \cdot \varrho_8}{2}$, also:

$$f = \frac{\pi r^2}{8} - \frac{r}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot \frac{r}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{\pi r^2}{8} - \frac{r^2}{4}\sqrt{2} = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}, \text{ also } 0{,}15658 \text{ qdm.}$$

Aufgabe 64. Man bestimme Umfang und Inhalt des Flächenstücks zwischen dem Kreise und zwei solchen Sehnen, die im Mittelpunkte zweier zu einander senkrechten Radien errichtet sind.

Erkl. 422. Da das Stück FC Mittelsenkrechte im gleichschenkligen Dreieck MDC ist, so hat es den Wert der Höhe eines gleichseitigen Dreiecks $= \frac{r}{2}\sqrt{3}$; davon abgezogen:

Auflösung. Für das Flächenstück ABC in Figur 110 ist zu bestimmen der Inhalt f und der Umfang:

$$u = \overline{AB} + \overline{AC} + \widehat{BC}.$$

Nun ist FC Mittelsenkrechte von MD, folglich ist MCD ein gleichseitiges Dreieck, und

$$\sphericalangle CMD = 60^0 = BME;$$

also ist $\sphericalangle DMB = 30^0$ und

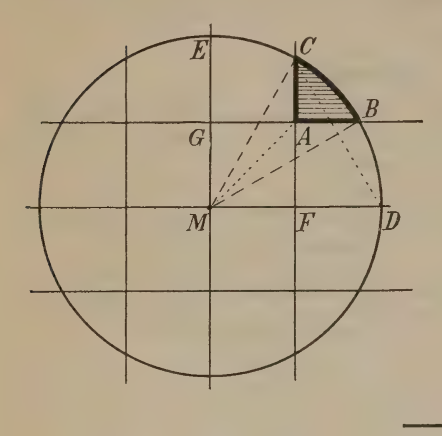
$$\sphericalangle BMC = 60^0 - BMD = 30^0.$$

$$AF = MG = \frac{r}{2}$$

gibt:

$$AC = \frac{r}{2}\sqrt{3} - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}(\sqrt{3}-1).$$

Figur 110.



Demnach ist $\widehat{BC} = \frac{1}{12}$ Peripherie, Sektor $BMC = \frac{1}{12}$ Kreisfläche.

Es wird daher:

$$u = \frac{2\pi r}{12} + 2(FC - AF)$$

$$= \frac{\pi r}{6} + 2\left(\frac{r\sqrt{3}}{2} - \frac{r}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi r}{6} + r\sqrt{3} - r = r\left(\frac{\pi}{6} + \sqrt{3} - 1\right)$$

$$= 1{,}255650 \cdot r.$$

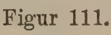
$$f = \frac{\pi r^2}{12} - 2 \cdot \triangle ACM = \frac{\pi r^2}{12} - 2 \cdot \frac{AC \cdot MF}{2}$$

$$= \frac{\pi r^2}{12} - \left(\frac{r\sqrt{3}}{2} - \frac{r}{2}\right) \cdot \frac{r}{2}$$

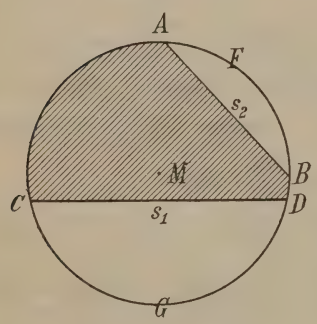
$$= \frac{\pi r^2}{12} - \frac{r^2}{4}(\sqrt{3}-1)$$

$$= \frac{r^2}{4}\left(\frac{\pi}{3} - \sqrt{3} + 1\right) = 0{,}078789 \cdot r^2.$$

Aufgabe 65. In Figur 111 bedeute AB eine Quadratseite, CD eine Dreiecksseite der entsprechenden eingeschriebenen regulären Vielecke: man berechne Umfang und Flächeninhalt des Flächenstücks $ABCD$.



Figur 111.



Auflösung. Da CD Dreiecksseite ist, so wird $\widehat{CGD} = \frac{2\pi r}{3}$, ebenso $\widehat{AFB} = \frac{2\pi r}{4}$, also Umfang:

$$AB + CD + (\text{Peripherie} - \widehat{AFB} - \widehat{CGD})$$

$$= r\sqrt{2} + r\sqrt{3} + 2\pi r\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= r\left(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \frac{5}{6}\pi\right).$$

Fläche $ABCD$ = Kreisfläche — (Segment ABF + Segment CDG).

Nun sind ABF und CDG Segmente der Art, wie in Aufgabe 63, nämlich:

$$ABF = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{s_4 \varrho_4}{2}$$

$$= \frac{\pi r^2}{4} - \frac{r\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{r\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2}$$

$$= r^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right),$$

$$CDG = \frac{\pi r^2}{3} - \frac{s_3 \varrho_3}{2} = \frac{\pi r^2}{3} - \frac{r\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{r}{2}$$

$$= \frac{\pi r^2}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = r^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Also wird:

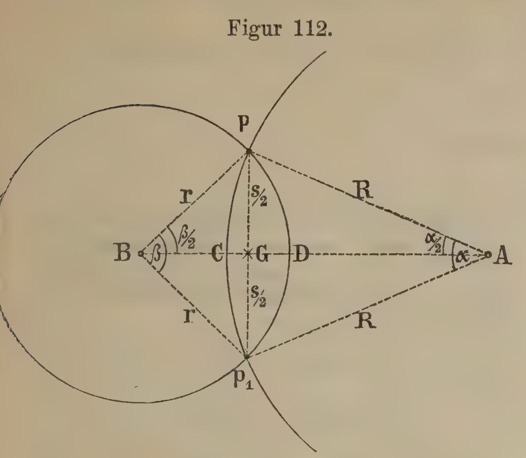
$$ABCD = \pi r^2 - r^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$= r^2\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Erkl. 423. Man beachte, dass auch hier die Einschränkung der Erkl. 421 in Geltung bleibt. Ferner ist bemerkenswert, dass sowohl der Umfang, als die Fläche $ABCD$ gleichgross bleibt, wie man auch die Sehnen AB und CD im Kreise verschiebt, wenn dieselben einander nur nicht innerhalb des Kreises schneiden.

Aufgabe 66. In Figur 112 sei $\sphericalangle \alpha = 45$, $\beta = 90$. Man berechne Umfang und Fläche der „Spitzbogenfläche" PCP_1D.

Figur 112.



Erkl. 424. Auch nebenstehende Aufgabe ist nur unter der Beschränkung zu lösen, dass die Winkel α und β Centriwinkel von elementar bestimmbaren Polygonen sind.

Auflösung. Bezeichnet man mit R und r die Radien der beiden Kreise, so ist PP_1 im Kreise R die Achtecksseite, im Kreise r die Viereckseite, also:

$$\widehat{PCP_1} = \frac{1}{8}\cdot 2\pi R,$$

$$\widehat{PDP_1} = \frac{1}{4}\cdot 2\pi r$$

und

$$u = \frac{\pi R}{4} + \frac{\pi r}{2} = \frac{\pi}{4}\,(R + 2r).$$

Ebenso ist nach Aufgabe 63:

$$\text{Fläche } PCP_1P = \frac{\pi R^2}{8} - \frac{R^2}{4}\sqrt{2}$$

und nach Aufgabe 65:

$$PDP_1P = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2},$$

also wird:

$$f = \frac{\pi R^2}{8} - \frac{R^2}{4}\sqrt{2} + \frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2}$$

$$= \frac{\pi}{8}\,(R^2 + 2r^2) - \frac{1}{4}\left(R^2\sqrt{2} + 2r^2\right).$$

Aufgabe 67. Ein Kreisviereck habe die Radien des Umkreises $= 15{,}2$, des Inkreises $= 6$; man berechne den ringförmigen Raum zwischen beiden Kreisen.

Erkl. 425. Beim Kreisviereck haben, wenn es nicht ein Quadrat ist, die Kreise keinen gemeinsamen Mittelpunkt, der Ring ist also kein koncentrischer, sondern ein excentrischer. — Das nebenstehende Kreisviereck ist das in Aufgabe 24 aufgestellte, mit $a = 30$, $b = 21$, $c = 5$, $d = 14$, Fläche 210, $r = 6$, $R = \frac{5}{2}\sqrt{37}$.

Auflösung. Ein ringförmiger Raum ist stets die Differenz aus der Fläche des grösseren und des kleineren Kreises. Dabei kann der kleine Kreis im grossen jede beliebige Lage annehmen, ohne dass sich der Raum des Ringes ändert. Man hat also:

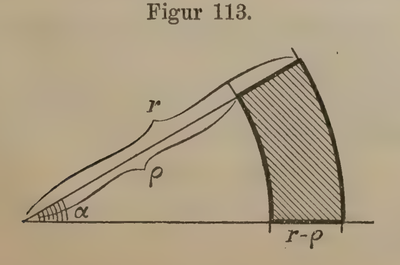
$$\text{Ring} = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$$
$$= \pi\,(R + r)\,(R - r).$$

Das Zahlenbeispiel gibt:

$$\pi\cdot 21{,}2\cdot 9{,}2 = 195{,}04\pi = 612{,}7.$$

Aufgabe 68. Man berechne Umfang und Gestalt eines Flächenstücks, das begrenzt ist durch zwei koncentrische Kreisbogen mit Radien $r = 10$ cm, $\varrho = 8$ cm und durch die Schenkel eines Centriwinkels von $\alpha^0 = 30^0$.

Figur 113.



Auflösung. Der Umfang besteht aus vier Stücken: zwei geradlinigen Strecken von der Länge $r - \varrho$ und zwei Kreisbogen von:

$$\frac{2\pi\alpha}{360}\cdot r \quad\text{und}\quad \frac{2\pi\alpha}{360}\cdot\varrho,$$

also ist:

$$u = 2(r - \varrho) + \frac{\pi\alpha}{180}\,(r + \varrho)$$

$$= 2\cdot 2 + \frac{\pi\cdot 30}{180}\cdot 18 = 4 + 3\pi,\text{ also } 13{,}425\text{ cm.}$$

Der Inhalt ist die Differenz zweier Sektoren: des grossen mit Radius r und des kleinen mit Radius ϱ, also:

Erkl. 426. Während bei der vorhergehenden Aufgabe die gegenseitige Lage der beiden Kreise völlig gleichgiltig war, ist die vorliegende Aufgabe nur lösbar für koncentrische Kreise. — Solche Figuren treten z. B. auf bei jedem regulären Vieleck, indem durch die Radien nach den Eckpunkten aus dem Umkreis und Inkreis (r und ϱ) Sektoren mit Centriwinkel $\alpha = \frac{360}{n}$ ausgeschnitten werden.

$$f = \frac{\pi r^2 \alpha}{360} - \frac{\pi \varrho^2 \alpha}{360}$$
$$= \frac{\pi \alpha}{360}(r^2 - \varrho^2) = \frac{\pi \alpha}{360}(r + \varrho)(r - \varrho)$$
$$= \frac{\pi \cdot 30}{360} \cdot 18 \cdot 2 = 3\pi, \text{ also } 9{,}425 \text{ qcm.}$$

Aufgabe 69. Man soll eine gegebene Kreisfläche in n Teile gleichen Inhalts und gleichen Umfangs teilen.

Figur 114.

Erkl. 427. Da die Durchmesser die $n$ten Teile des ganzen Durchmessers sind, so müssen auch die Radien die $n$ten Teile des ganzen Radius sein. Nimmt man also $\frac{k}{n}$ und $\frac{n-k}{n}$, so hat man für zwei zusammengehörige Halbkreise die Umfangssumme:

$$\frac{k}{n}\pi r + \frac{n-k}{n}\pi r,$$

jedesmal gleich:

$$\frac{k+n-k}{n}\pi r = \pi r.$$

Da jede Teilfläche von zwei solchen Halbkreispaaren begrenzt ist, so ist ihre Fläche $2\pi r$.

Erkl. 428. Nimmt man für die Fläche, ähnlich wie zuvor, einen Teil heraus, der vom $k$ten und $(k+1)$ten Halbkreispaare begrenzt ist, so hat man einerseits des Durchmessers:

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{k+1}{n}\right)^2 r^2 - \frac{\pi}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^2 r^2$$
$$= \frac{\pi r^2}{2n^2}\left[(k+1)^2 - k^2\right]$$
$$= \frac{\pi r^2}{2n^2}(k+1+k)(k+1-k) = \frac{\pi r^2}{2n^2}(2k+1);$$

Auflösung. Der gestellten Aufgabe wird genügt, indem man den Durchmesser d in n Teile teilt und nach Art der Figur 114 beiderseits des Durchmessers Halbkreise einzeichnet über:

$$\frac{1}{n}d \quad \text{und} \quad \frac{n-1}{n}d,$$
$$\frac{2}{n}d \quad \text{und} \quad \frac{n-2}{n}d,$$
$$\frac{3}{n}d \quad \text{und} \quad \frac{n-3}{n}d, \cdots$$

Zum Beweise beachte man, dass die Radien dieser Halbkreise sind:

$$\frac{1}{n}r \quad \text{und} \quad \frac{n-1}{n}r,$$
$$\frac{2}{n}r \quad \text{und} \quad \frac{n-2}{n}r,$$
$$\frac{3}{n}r \quad \text{und} \quad \frac{n-3}{n}r, \cdots$$

ihre Umfänge also:

$$\frac{1}{n}\pi r \quad \text{und} \quad \frac{n-1}{n}\pi r,$$
$$\frac{2}{n}\pi r \quad \text{und} \quad \frac{n-2}{n}\pi r,$$
$$\frac{3}{n}\pi r \quad \text{und} \quad \frac{n-3}{n}\pi r, \cdots$$

ihre Inhalte aber:

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n^2} r^2 \quad \text{und} \quad \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 r^2,$$
$$\frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 r^2 \quad \text{und} \quad \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{n-2}{n}\right)^2 r^2.$$
$$\frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{3}{n}\right)^2 r^2 \quad \text{und} \quad \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{n-3}{n}\right)^2 r^2 \cdots$$

Da nun die Umfänge der entstehenden Flächenteile sich aus je zwei Paaren zweier benachbarten Umfänge zusammensetzen, so erkennt man, dass die Umfänge alle gleichgross, nämlich:

$$2 \cdot \frac{n}{n}\pi r = 2\pi r$$

oder gleich dem Umfang des gegebenen Kreises sind.

und anderseits des Durchmessers kommt hinzu die Fläche:

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{n-k}{n}\right)^2 r^2 - \frac{\pi}{2}\left(\frac{n-k-1}{n}\right)^2 r^2$$

$$= \frac{\pi r^2}{2n^2}[(n-k)^2-(n-k-1)^2]$$

$$= \frac{\pi r^2}{2n^2}(n-k+n-k-1)(n-k-n+k+1)$$

$$= \frac{\pi r^2}{2n^2}(2n-2k-1).$$

Durch Addition beider Flächenteile entsteht:

$$\frac{\pi r^2}{2n^2}[(2k+1)+(2n-2k-1)] = \frac{\pi r^2}{2n^2}\cdot 2n = \frac{\pi r^2}{n},$$

also der $n$te Teil der Kreisfläche.

Ebenso lässt sich nachweisen (vergleiche Erkl. 428), dass die sämtlichen Flächeninhalte gleichgross, nämlich $\frac{\pi r^2}{n}$ sind.

Aufgabe 70. Mit der Zahl π lässt sich auch Umfang und Inhalt der Ellipse angeben, indem der Umfang annähernd gleich $\pi(a+b)$, der Inhalt genau gleich πab ist, wobei a und b die Halbachsen der Ellipse bedeuten. Man berechne hiernach Umfang und Fläche einiger Ellipsen.

Erkl. 429. Die Richtigkeit obiger Angaben kann nur durch höhere Mathematik (Integrationsrechnung) bewiesen werden. Bezeichnet man die Achsen mit $2a$ und $2b$, so ist das arithmetische Mittel der Halbachsen:

$$\frac{a+b}{2} = r_1,$$

also:

$$2\pi r_1 = (a+b)\pi;$$

das geometrische Mittel der Halbachsen ist:

$$\sqrt{ab} = r_2,$$

also:

$$\pi r_2^2 = \pi ab.$$

(An Stelle des ersteren tritt streng genommen ein „elliptisches Integral“.)

Auflösung. Ist z. B. die grosse Achse 20 m, die kleine 12 m, so ist:

$$a = 10, \quad b = 6,$$

$$u = \pi\cdot 16, \text{ also } 50\frac{1}{4} \text{ m},$$

$$f = \pi\cdot 60, \text{ also } 188\frac{1}{2} \text{ qm}.$$

Man kann daher in Worten zusammenfassen:

Der Umfang einer Ellipse ist (annähernd) gleich dem Umfang eines Kreises, dessen Radius das arithmetische Mittel der Halbachsen ist,

der Inhalt einer Ellipse ist (genau) gleich dem Inhalt eines Kreises, dessen Radius das geometrische Mittel der Halbachsen ist.

---

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 71. Man berechne den Wert der Reihen:

$$\alpha)\quad \frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot\frac{12\cdot 12}{11\cdot 13}\cdot\frac{18\cdot 18}{17\cdot 19}\cdots$$

$$\beta)\quad \frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{8^2-1}+\frac{1}{12^2-1}\cdots$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 49.

Aufgabe 72. Wie genau ist die Angabe:

$$\pi = \sqrt{5^2-2^2}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}-2?$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 50.

Aufgabe 73. Man soll den vorigen Wert von π geometrisch konstruieren.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 50.

Aufgabe 74. 1) Man berechne die Länge eines Bandes um einen runden Tisch von $1\frac{1}{2}$ m Durchmesser.

2) Wie weit läuft ein Rad von $\frac{3}{4}$ m Spaiche bei 1000 Umläufen?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 51.

Aufgabe 75. 1) Welchen Radius hat ein Baumstamm, der von vier Männern umspannt wird?

2) Man berechne den Durchmesser eines Rades, das sich auf 1 Kilometer Strecke 300 mal umdreht.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgaben ist analog der Auflösung der Aufgabe 52.

Aufgabe 76. Man berechne den Bogen von $79^0\,38'\,54''$ bei einem Kreise von 20 m Radius.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 53.

Aufgabe 77. Man berechne den Radius eines Kreises, bei dem der Bogen von $85^0\,17'\,30''$ 20 m Länge hat.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 54.

Aufgabe 78. Man berechne den Centriwinkel eines Bogens von 54,7 dm Länge an einem Kreise von 20 dm Radius.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 55.

Aufgabe 79. Man bestimme die Fläche eines Zahnrades, das 60 Zähne zu 0,9 mm und ebensoviele Lücken von 1,1 mm besitzt.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 57.

Aufgabe 80. Um wieviel darf ein Seil kürzer werden, damit es in Kreisform ebenso viel Flächenraum umschliesst, als zuvor in Quadratform?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 58.

Aufgabe 81. Wie verhalten sich die Radien zweier Kreise, wenn das Verhältnis der Umfänge bezw. der Flächen gegeben ist?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 59.

Aufgabe 82. Man berechne den Sektor von $40^0\,34'\,10''$ in einem Kreise von 10 m Radius.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 60.

Aufgabe 83. Man berechne den Radius eines Kreises, in welchem der Centriwinkel $100\frac{1}{2}^0$ 470 qcm Fläche ausschneidet.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 61.

Aufgabe 84. Durch welchen Centriwinkel wird in einem Kreise von 10 m Radius ein Sektor von 128 qm ausgeschnitten?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 62.

Aufgabe 85. Man bestimme Umfang und Inhalt des Kreissegments von 30^0 Centriwinkel im Kreis mit Radius 2 cm.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 63.

Aufgabe 86. Einem Quadrat von Seite a sei ein Kreis um- und eingeschrieben. Man berechne Umfang und Fläche je eines der von Kreis und Quadratseiten begrenzten Flächenstücke (siehe Figur 115 auf folgender Seite).

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 64.

Aufgabe 87. Man berechne Umfang und Inhalt des Flächenstücks zwischen einem Durchmesser und einer halbsogrossen Sehne bei beliebiger Lage der letzteren.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 65.

Aufgabe 88. Ein Rechteck mit Seiten a und b (siehe Figur 116 auf folgender Seite) ist abgeschlossen durch zwei Kreisbogen mit Radien a, deren Mittelpunkte die Endpunkte der einen Seite b sind. Welchen Umfang und Inhalt hat die ganze Fläche?

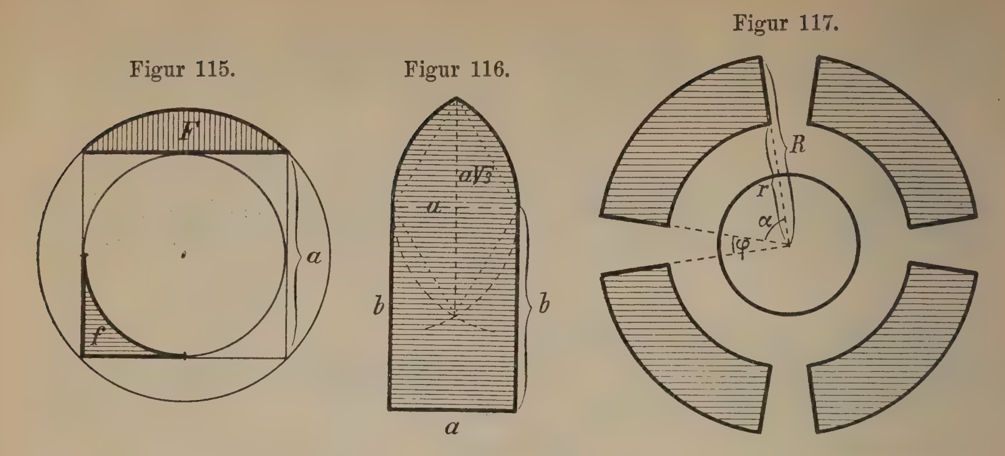
Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 66.

Aufgabe 89. Der wievielte Teil der Sonnenscheibe bleibt bei der Dauer einer ringförmigen Sonnenfinsternis sichtbar, wenn der Radius des durch den Mond verdunkelten Kreises nur $\frac{1}{12}$ kleiner ist als der der Sonnenscheibe?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 67.

Aufgabe 90. Bei einer Gartenanlage werden um einen Teich herum in Ringform vier Rasenflächen angelegt (siehe Figur 117 auf folgender Seite) mit Abständen der Ränder R (10 m) und r (8 m) vom Mittelpunkt, und je φ (20^0) Mittelpunktswinkel der vier durchschneidenden Wege. Wieviel Meter Einfassungsgitter der Rasenstücke und für wieviel Quadratmeter Grassamen wird nötig?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 68.



Aufgabe 91. Man vergleiche Figur 114 mit derjenigen, bei welcher über den je aufeinanderfolgenden Teilen des Durchmessers Halbkreise auf je verschiedenen Seiten desselben gezeichnet werden.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 69.

Aufgabe 92. Man bestimme Umfang und Inhalt einer Ellipse mit Halbachsen:

$\alpha)\ a = 3{,}5,\quad b = 1{,}4.\qquad \beta)\ a = b.$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 70.

---

4) Aufgaben über Kreise als ähnliche Figuren.

(Zu Abschnitt 4.)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 93. Man soll den in Erkl. 152 aufgestellten Lehrsatz im einzelnen nachweisen.

Erkl. 430. Bei einer Erzeugung einer neuen Figur aus einer vorhandenen ursprünglichen bei von Punkt zu Punkt festgehaltener gleichmässiger Konstruktionsvorschrift nennt man die neue Figur „Abbildung“ der ursprünglichen, und diese selbst die Originalfigur. Solches kommt in den verschiedensten Teilen der Geometrie vielfach vor (vergleiche auch Abschnitt 6a und b dieses Teiles). Das ganze Kapitel von der Aehnlichkeit nennt man auch die Lehre von der „ähnlichen Abbildung“.

Erkl. 431. Die drei verschiedenen Fälle des Teilungsverhältnisses, welche im nebenstehenden unterschieden werden, lassen sich rechnungsmässig auseinanderhalten, wenn man dem Teilungsverhältnis positiven oder negativen Wert zuschreibt, wie solches in Antwort der Frage 13 des VI. Teiles dieses Lehrbuches geschehen. Man erhält dann den ersten Fall

Auflösung. Ist S in Figur 118 und 119 der Punkt, welcher mit den sämtlichen Punkten eines Kreises verbunden wird, so kann die Teilung dieser Verbindungsstrecken im Verhältnis $m:n$ entweder innere Teilung oder äussere Teilung sein.

1) Im ersten Falle hat man Figur 118 mit M_1 als Originalkreis und M_2 als Abbildung, S_a als äusseren Aehnlichkeitspunkt. Für die Punktepaare P_1P_2, R_1R_2, M_1M_2 gilt die Beziehung:

$$SP_2 : P_2P_1 = SR_2 : R_2R_1 = SM_2 : M_2M_1 = m:n,$$

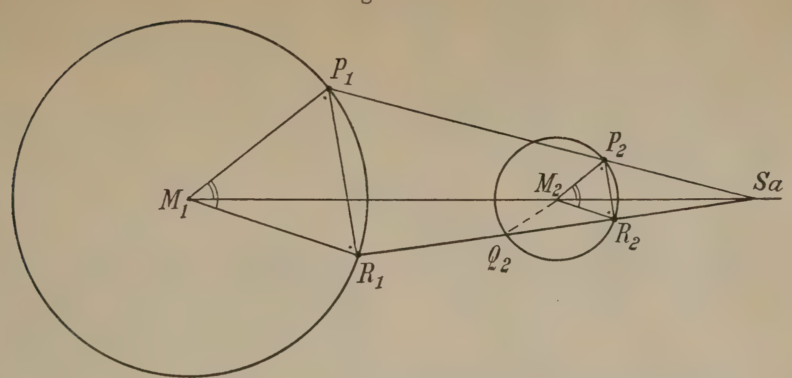
also:

$$\begin{aligned} SP_2 : SP_1 &\equiv SP_2 : (SP_2 + P_2P_1) \\ = SR_2 : SR_1 &\equiv SR_2 : (SR_2 + R_2R_1) \\ = SM_2 : SM_1 &\equiv SM_2 : (SM_2 + M_2M_1) \\ &= m : (m+n). \end{aligned}$$

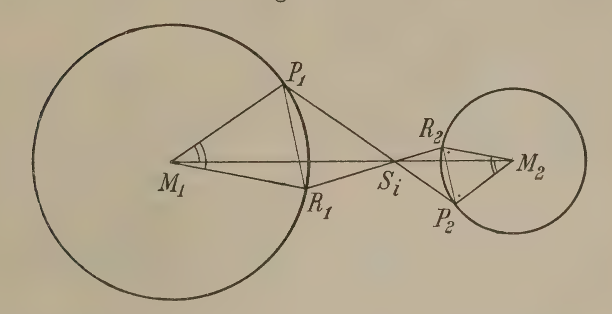
Und da $SM_1P_1 \sim SM_2P_2$, so wird auch:

$$M_2P_2 : M_1P_1 = SM_2 : SM_1 = m:(m+n).$$

Figur 118.



Figur 119.



nebenstehender Ausführungen, wenn $m:n$ positiv, d. h.:

$$0 < \frac{m}{n} < \infty,$$

den zweiten, wenn $m:n$ negativ zwischen 1 und ∞, d. h.:

$$-\infty < \frac{m}{n} < -1,$$

den dritten Fall, wenn $m:n$ ein negativer echter Bruch, d. h.:

$$-1 < \frac{m}{n} < 0.$$

Erkl. 432. Um den Beweis des Lehrsatzes in Erkl. 152 für einen dieser drei Fälle, etwa den letzten zu führen, verfährt man am besten indirekt: Teilt man $S_i M_1$ äusserlich im Punkte M_2 und zieht um M_2 einen Kreis mit Radius r_2, welcher sich verhält zu r_1 wie $SM_2 : SM_1$, so entsteht nach Antwort der Frage 51 auf jedem Verbindungsstrahle SP, SR u. s. w. das Verhältnis:

$$SP_2 : SP_1 = SR_2 : SR_1 = SM_2 : SM_1,$$

also:

$$SP_2 : P_2 P_1 \equiv SP_2 : (SP_2 + SP_1) = \cdots$$
$$= SM_2 : (SM_2 + SM_1) = SM_2 : M_1 M_2.$$

Dies ist aber das vorgeschriebene Teilungsverhältnis, und da es nur einen einzigen Teil-

2) Ist die Teilung $m:n$ eine äussere Teilung, so ist zu unterscheiden, ob der Teilpunkt auf der Seite ausserhalb des betrachteten Kreispunktes liegt, oder auf der Seite ausserhalb des festen Punktes S.

Im ersten Falle hat man wieder Figur 118, aber mit M_2 als Originalkreis und M_1 als Abbildung, S_a als äusseren Aehnlichkeitspunkt. Die geltenden Proportionen sind:

$$SP_1 : P_1 P_2 = SR_1 : R_1 R_2 = SM_1 : M_1 M_2 = m:n,$$

also:

$$SP_1 : SP_2 \equiv SP_1 : (SP_1 - SP_2)$$
$$= SR_1 : SR_2 \equiv SR_1 : (SR_1 - R_1 R_2)$$
$$= SM_1 : SM_2 \equiv SM_1 : (SM_1 - M_1 M_2)$$
$$= m : (m - n),$$

und wegen der Aehnlichkeit auch:

$$M_1 P_1 : M_2 P_2 = M_1 S : M_2 S = m : (m - n).$$

3) Liegt der Teilpunkt ausserhalb des festen Punktes S, so hat man Figur 119, nämlich M_1 als Originalkreis, M_2 als Abbildung, S_i als inneren Aehnlichkeitspunkt (oder umgekehrt M_2 als Original, M_1 als Abbildung und S_i als inneren Aehnlichkeitspunkt). Dabei gilt:

$$SP_2 : P_2 P_1 = SR_2 : R_2 R_1 = SM_2 : M_2 M_1 = m:n,$$

also:

punkt für ein solches auf jedem Strahle gibt, so muss die Gesamtheit der Teilpunkte zusammenfallen mit der Gesamtheit der Kreispunkte.

Zur Ausrechnung hat man nur immer in passender Weise die sog. „korrespondierende Addition und Subtraktion“ (vergl. Antwort 25 des VI. Teiles dieses Lehrbuches) auf die Proportionen anzuwenden.

$$SP_2 : SP_1 \equiv SP_2 : (P_1 P_2 - SP_2)$$
$$= SR_2 : SR_1 \equiv SR_2 : (R_1 R_2 - SR_2)$$
$$= SM_2 : SM_1 \equiv SM_2 : (M_1 M_2 - SM_2)$$
$$= m : (n - m),$$

und

$$M_2 P_2 : M_1 P_1 = SM_2 : SM_1 = m : (n - m).$$

Aufgabe 94. Man soll eine Gerade konstruieren, welche von zwei gegebenen Punkten vorgeschriebene Abstände d_1 und d_2 hat.

Erkl. 433. Vergleicht man nebenstehende Lösung der Tangentenaufgabe mit der in Aufgabe 153 des IV. Teiles dieses Lehrbuches gegebenen, so findet man, dass beide Lösungen zurückgehen auf die Konstruktion von Tangenten aus einem gegebenen Punkte an einen Kreis. Die Art dieser Zurückführung ist in vorliegender Lösung ein natürlichere, als früher, bedarf aber zum Beweise die Anwendung der Proportionen, was früher nicht der Fall war.

Erkl. 434. Die Zahl der Lösungen ist, wenn man mit c den Abstand der Punkte M_1 und M_2 bezeichnet und $d_1 > d_2$ annimmt, d. h. der grösseren der Strecken d die Beziehung d_1, der kleineren die Beziehung d_2 zuschreibt:

4 Lösungen	3 Lösungen	2 Lösungen	1 Lösung	0 Lösungen
$d_1 + d_2 < c$	$d_1 + d_2 = c$	$d_1 + d_2 > c > d_1 - d_2$	$d_1 - d_2 = c$	$d_1 - d_2 > c$.

Auflösung. Denkt man sich um die beiden gegebenen Punkte M_1 und M_2 Kreise gezogen mit den Radien d_1 und d_2, so ist jede gemeinsame Tangente beider Kreise eine Gerade von der verlangten Eigenschaft, weil die Berührungsradien den senkrechten Abstand der Tangente vom Kreismittelpunkt angeben.

Man zeichnet also um M_1 und M_2 die Kreise mit Radien $d_1 d_2$, zieht zwei beliebige parallele Radien und erhält durch die Verbindungsgeraden von deren gleich und entgegengesetzt liegenden Endpunkten die beiden Aehnlichkeitspunkte. Tangenten aus diesen an einen der Kreise sind zugleich Tangenten an den andern Kreis. — Man erhält also im allgemeinen vier Lösungen der Aufgabe. Der Beweis ist bereits angegeben in Erkl. 163.

Aufgabe 95. Man soll die bei den gemeinsamen Tangenten zweier Kreise in Betracht kommenden Streckengrössen durch r_1, r_2, c ausdrücken.

Erkl. 435. In Figur 120 ist der Einfachheit halber S_a und S_i mit A und J bezeichnet. Die Streckengleichheiten an dieser Figur sind untersucht in Antwort der Frage 115 des IV. Teiles dieses Lehrbuches. Die wichtigsten derselben sind in der Figur selbst durch die Bezeichnungsweise angedeutet, nämlich:

$$P_1 K_1 = K_1 R_1 = L_1 Q_1 = L_1 S_1$$
$$= P_2 K_2 = K_2 S_2 = L_2 Q_2 = L_2 R_2,$$

und

$$P_1 P_2 = Q_1 Q_2 = K_1 L_2 = K_2 L_1;$$
$$R_1 R_2 = S_1 S_2 = K_1 K_2 = L_1 L_2.$$

Diese Gleichungen sind verwendet zu den am Schlusse nebenstehender Auflösung angedeuteten Beziehungen.

Erkl. 436. Die Beziehungen:

$$P_1 P_2 = \sqrt{c^2 - (r_2 - r_1)^2}$$

und

Auflösung. Da durch die Beziehungen der Aehnlichkeitspunkte in den rechtwinkligen Dreiecken AM_1P_1, AM_2P_2, JM_1R_1, JM_2R_2 der Figur 120 die Hypotenuse bekannt ist, so kann man sämtliche übrigen Stücke nach dem Pythagoreischen Lehrsatze berechnen.

Es ist nämlich:

$$M_1 A : M_2 A = r_1 : r_2 = M_1 A : (c + M_1 A),$$

folglich:

$$M_1 A = \frac{c \cdot r_1}{r_2 - r_1},$$
$$M_2 A = \frac{c \cdot r_2}{r_2 - r_1}.$$

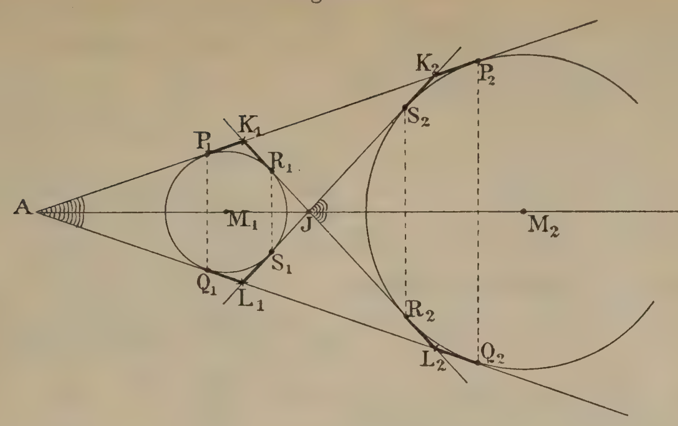
Ebenso folgt:

$$M_1 J : M_2 J = r_1 : r_2 = M_1 J : (c - M_1 J),$$

also:

$$M_1 J = \frac{c \cdot r_1}{r_2 + r_1},$$
$$M_2 J = \frac{c \cdot r_2}{r_2 + r_1}.$$

Figur 120.



$$R_1 R_2 = \sqrt{c^2 - (r_2 + r_1)^2}$$

sind schon aus der in Erkl. 433 erwähnten früheren Tangentenkonstruktion abzuleiten mittels des Pythagoreischen Lehrsatzes. Denn da dort an die Kreise um M_2 mit den Radien $r_2 \pm r_1$ Tangenten von M_1 aus konstruiert werden, so sind die entstehenden Tangenten Katheten im rechtwinkligen Dreiecke mit Hypotenuse c und Katheten $r_2 \pm r_1$. Die Längen von $M_1 A$, $M_2 J, \cdots$ AP_1, $JR_2 \cdots$ sind dagegen nicht ohne Anwendung der Proportionen zu erhalten.

Erkl. 437. Man bestätigt leicht aus nebenstehenden Formeln die Richtigkeit der Determination in Erkl. 434: Ist $r_2 + r_1 = c$, so wird $R_1 R_2 = 0$, hat also nur diesen einen Wert, für $r_2 + r_1 < c$ erhält $R_1 R_2$ zwei gleiche reelle Werte von entgegengesetztem Zeichen; ist schon $r_2 - r_1 = c$, so ist auch $P_1 P_2 = 0$, und nur für $r_2 - r_1 < c$ erhält $P_1 P_2$ zwei reelle Werte. Es erhält also entprechend obiger Tabelle:

$R_1 R_2$ zwei reelle und $P_1 P_2$ zwei reelle Werte für $c > r_2 + r_1$;

$R_1 R_2$ einen reellen und $P_1 P_2$ zwei reelle Werte für $c = r_2 + r_1$;

$R_1 R_2$ keinen reellen und $P_1 P_2$ zwei reelle Werte für $r_2 + r_1 > c > r_2 - r_1$;

$R_1 R_2$ keinen reellen und $P_1 P_2$ einen reellen Wert für $c = r_2 - r_1$;

$R_1 R_2$ keinen reellen und $P_1 P_2$ keinen reellen Wert für $c < r_2 - r_1$.

Erkl. 438. Umgekehrt kann man aber auf Grund nebenstehender Formeln die Behauptung aufstellen, dass es möglich ist, auch für schneidende Kreise noch zwei innere Tangenten bezw. für ineinanderliegende Kreise vier Tangentenwerte algebraisch anzusetzen, dass dieselben aber nicht reell sind, ihre imaginären Werte vielmehr eben in obigen Formeln ihren Ausdruck finden. So hätte man z. B. für:

$$r_2 + r_1 > c > r_2 - r_1$$

zwei reelle äussere Tangenten:

Nun ist:

$$\overline{AP_1}^2 = \overline{AM_1}^2 - r_1^2,$$
$$\overline{AP_2}^2 = \overline{AM_2}^2 - r_2^2,$$
$$\overline{JR_1}^2 = \overline{JM_1}^2 - r_1^2,$$
$$\overline{JR_2}^2 = \overline{JM_2}^2 - r_2^2.$$

Durch Einsetzung obiger Werte entsteht hieraus:

$$AP_1 = \sqrt{\left(\frac{cr_1}{r_2 - r_1}\right)^2 - r_1^2}$$
$$= \frac{r_1}{r_2 - r_1} \sqrt{c^2 - (r_2 - r_1)^2};$$
$$AP_2 = \sqrt{\left(\frac{cr_2}{r_2 - r_1}\right)^2 - r_2^2}$$
$$= \frac{r_2}{r_2 - r_1} \sqrt{c^2 - (r_2 - r_1)^2};$$
$$JR_1 = \sqrt{\left(\frac{cr_1}{r_2 + r_1}\right)^2 - r_1^2}$$
$$= \frac{r_1}{r_2 + r_1} \sqrt{c^2 - (r_2 + r_1)^2};$$
$$JR_2 = \sqrt{\left(\frac{cr_2}{r_2 + r_1}\right)^2 - r_2^2}$$
$$= \frac{r_2}{r_2 + r_1} \sqrt{c_2 - (r_2 + r_1)^2}.$$

Bildet man durch Subtraktion bezw. Addition die Längen der gemeinsamen äusseren bezw. inneren Tangenten, so entsteht durch Wegfall des Bruches $\frac{r_2 \pm r_1}{r_2 \pm r_1} = 1$:

$$P_1 P_2 = AP_2 - AP_1 = \sqrt{c^2 - (r_2 - r_1)^2}$$
$$= Q_1 Q_2 = K_1 L_2 = K_2 L_1$$

und

$$R_1 R_2 = JR_2 + JR_1 = \sqrt{c^2 - (r_2 + r_1^2)}$$
$$= S_1 S_2 = K_1 K_2 = L_1 L_2.$$

Daraus kann dann berechnet werden:

$$P_1P_2 = \sqrt{c^2 - (r_2 - r_1)^2}$$

und zwei imaginäre innere Tangenten:

$$R_1R_2 = \sqrt{c^2 - (r_2 + r_1)^2} = i \cdot \sqrt{(r_2 + r_1)^2 - c^2};$$

für $c < r_2 - r_1$ zwei imaginäre Tangentenpaare mit den Werten:

$$i\sqrt{(r_2 + r_1)^2 - c^2}$$

und

$$i\sqrt{(r_2 - r_1)^2 - c^2}.$$

$$P_1K_1 = \cdots = P_2K_2 = \cdots = \frac{1}{2}(P_1P_2 - K_1K_2),$$

und des weiteren auch noch:

$$M_1K_1 = \sqrt{r_1^2 + \overline{P_1K_1}^2},$$

$$M_2K_2 = \sqrt{r_2^2 + \overline{P_2K_2}^2};$$

sowie endlich:

$$AK_1 = AP_1 + P_1K_1, \quad AK_2 = AP_2 - P_2K_2,$$

$$JK_1 = JR_1 + R_1K_1, \quad JK_2 = JS_2 + K_2S_2.$$

Aufgabe 96. Man berechne die Werte der vorigen Aufgabe für $c = 15$, $r_1 = 5$, $r_2 = 7{,}5$.

Erkl. 439. Um die Werte MA, MJ in ganzen Zahlen zu erhalten, muss man auf die Tabelle in Aufgabe 145 des VI. Teiles dieses Lehrbuches zurückgreifen; um die Wurzelwerte der Tangenten rational zu erhalten, muss man für c, $r_2 + r_1$, $r_2 - r_1$ pythagoreische Zahlen wählen (vergl. Erkl. 81 im V. Teile d. Lehrb.)

Erkl. 440. Setzt man $r_1 = r_2$, so wird:

$$r_2 - r_1 = 0, \quad r_2 + r_1 = 2r,$$

also:

$$M_1A = M_2A = AP_1 = AP_2 = \infty,$$

$$M_1J = M_2J = \frac{c}{2},$$

$$JR_1 = JR_2 = \frac{1}{2}\sqrt{c^2 - 4r^2},$$

d. h. der äussere Aehnlichkeitspunkt liegt unendlich fern, der innere im Mittelpunkt der Centralen.

Auflösung. Da $r_2 + r_1 < c$ ist, so erhält man vier reelle Tangenten und zwar ist:

$$M_1A = \frac{15 \cdot 5}{2{,}5} = 30, \quad M_2A = \frac{15 \cdot 7{,}5}{2{,}5} = 45,$$

$$M_1J = \frac{15 \cdot 5}{12{,}5} = 6, \quad M_2J = \frac{15 \cdot 7{,}5}{12{,}5} = 9,$$

$$AP_1 = \frac{5}{2{,}5}\sqrt{15^2 - 2{,}5^2} = 5\sqrt{35} = 29{,}5804,$$

$$AP_2 = \frac{7{,}5}{2{,}5}\sqrt{15^2 - 2{,}5^2} = 7{,}5\sqrt{35} = 44{,}3706,$$

$$JR_1 = \frac{5}{12{,}5}\sqrt{15^2 - 12{,}5^2} = \sqrt{11} = 3{,}3166,$$

$$JR_2 = \frac{7{,}5}{12{,}5}\sqrt{15^2 - 12{,}5^2} = 1{,}5\sqrt{11} = 4{,}9749,$$

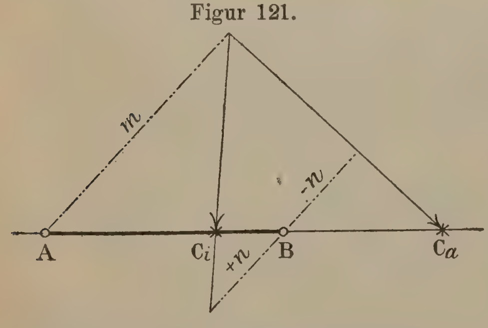
$$P_1P_2 = \sqrt{15^2 - 2{,}5^2} = 2{,}5\sqrt{35} = 14{,}7902,$$

$$R_1R_2 = \sqrt{15^2 - 12{,}5^2} = 2{,}5\sqrt{11} = 8{,}2915,$$

$$P_1K_1 = \cdots = 3{,}2494.$$

Aufgabe 97. Man soll die Aehnlichkeitspunkte zweier gegebenen Kreise auf Grund der harmonischen Teilung konstruieren.

Figur 121.

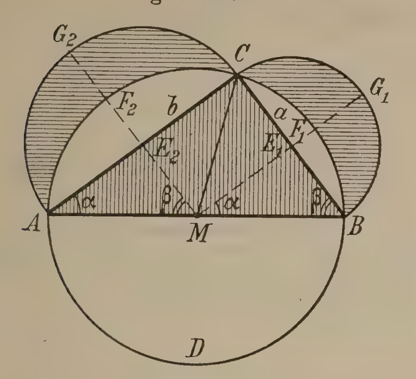


Erkl 441. Um die Strecke AB der Fig. 121 innen und aussen im Verhältnis $m:n$ zu teilen, trägt man in A und B $\pm n \parallel m$ an, verbindet die Endpunkte, und erhält C_a als äusseren, C_i als inneren Teilpunkt der Strecke AB mit dem Teilungsverhältnis $m:n$.

Auflösung. Man findet nach einer der Konstruktionsweisen in Antwort der Frage 31 des VI. Teiles dieses Lehrbuches die beiden Teilpunkte, durch welche die Centralstrecke c innen und aussen im Verhältnis der Radien r_1 und r_2 geteilt wird. — Davon erscheint insbesondere die durch Figur 121 (Figur 21 des VI. Teiles dieses Lehrbuches) dargestellte Konstruktion als genaue Wiedergabe der allgemeinen Konstruktion der Aehnlichkeitspunkte, indem $m = r_1$, $\pm n$ als gleich- bezw. entgegengesetzt parallele Richtung von r_2 zu setzen ist.

Aufgabe 98. Man soll die „Möndchen des Hippokrates“ für ein Dreieck mit Winkeln 30^0, 60^0, 90^0 berechnen.

Figur 122.



Erkl. 442. Setzt man für die Fälle, wo α ein aliquoter Teil von 180^0 ist, allgemein:

$$\sphericalangle \alpha = \frac{180^0}{n},$$

so wird:

$$2\alpha = \frac{360^0}{n},$$

also hat man in einem Kreis um A mit Radius AB einen Centriwinkel des regelmässigen n-Ecks, so dass:

$$AB = c = r, \quad BC = a = \frac{1}{2} s_n, \quad AC = b = \varrho_n.$$

Durch Einsetzung dieser Werte entsteht:

$$\triangle\, ABC = \frac{ab}{2} = \frac{s\varrho}{4};$$

$$\triangle\, MBC = MAC = \frac{s \cdot \varrho}{8};$$

$$\text{Halbkreis } ACB = \left(\frac{r}{2}\right)^2 \frac{\pi}{2} = \frac{r^2\pi}{8};$$

$$\text{Halbkreis } BG_1C = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{s^2}{4} = \frac{\pi s^2}{32};$$

$$\text{Halbkreis } AS_2C = \frac{\pi}{8}\varrho^2;$$

Centriwinkel des Sektors:

$$MBF_1C = 2\alpha = \frac{360}{n},$$

Centriwinkel des Sektors:

$$MAF_2C = 180 - 2\alpha = \frac{n-2}{n} \cdot 180,$$

also:

$$\text{Sektor } MBF_1C = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2 \pi = \frac{r^2\pi}{4n},$$

Sektor:

$$MAF_2C = \frac{n-2}{2n} \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2 \pi = \frac{(n-2)\, r^2\pi}{8n};$$

Auflösung. Ist $\sphericalangle \alpha$ in Figur 122 gleich 30^0, so ist es möglich, alle Stücke des Dreiecks nach c auszudrücken, nämlich:

$$a = \frac{c}{2}, \quad b = \frac{c}{2}\sqrt{3}.$$

Denn in diesem Falle ist das Dreieck ABC die Hälfte eines gleichschenkligen Dreiecks mit Höhe b. Demnach ist:

$$\triangle\, ABC = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2}\sqrt{3} = \frac{c^2}{8}\sqrt{3};$$

$$\triangle\, MAC = MBC = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{b}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2}\sqrt{3}$$

$$= \frac{c^2}{16}\sqrt{3} = \frac{1}{2} ABC.$$

Halbkreisfläche:

$$BCG_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{c^2}{4} = \frac{c^2}{32} \cdot \pi;$$

Halbkreisfläche:

$$ACG_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^2 \pi = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{3c^2}{4} = \frac{3c^2\pi}{32};$$

deren Summe:

$$\frac{4}{32} c^2\pi = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2 \pi = \text{Halbkreis } ACB.$$

Sektor:

$$MBF_1C = \left(\frac{c}{2}\right)^2 \frac{\pi}{360} \cdot \sphericalangle BMC$$

$$= \frac{\pi}{6} \cdot \frac{c^2}{4} = \frac{\pi c^2}{24};$$

Sektor:

$$MAF_2C = \left(\frac{c}{2}\right)^2 \frac{\pi}{360} \cdot \sphericalangle AMC = \frac{\pi c^2}{12}.$$

Also ist Segment:

$$BF_1CE_1 = \frac{\pi c^2}{24} - \frac{c^2}{16}\sqrt{3}$$

$$= \frac{c^2}{8}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right);$$

Segment:

$$AF_2CE_2 = \frac{\pi c^2}{12} - \frac{c^2}{16}\sqrt{3}$$

$$= \frac{c^2}{4}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{4}\sqrt{3}\right);$$

Möndchen:

$$BF_1CG_1 = \frac{c^2}{32}\pi - \frac{c^2\pi}{24} + \frac{c^2}{16}\sqrt{3}$$

$$= \frac{c^2}{16}\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}\right);$$

Möndchen:

$$AF_2CG_2 = \frac{3c^2\pi}{32} - \frac{c^2\pi}{12} + \frac{c^2}{16}\sqrt{3}$$

$$= \frac{c^2}{16}\left(\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}\right).$$

Segment $BF_1CE_1 = \frac{r^2\pi}{4\pi} - \frac{s\cdot\varrho}{8}$,

Segment $AF_2CE_1 = \frac{n-2}{n}\cdot\frac{r^2\pi}{8} - \frac{s\varrho}{8}$.

Also:

Möndchen $BF_1CG_1 = \frac{\pi s^2}{32} + \frac{s\cdot\varrho}{8} - \frac{r^2\pi}{4n}$,

Möndchen:

$$AF_2CG_2 = \frac{\pi\varrho^2}{8} + \frac{s\varrho}{8} - \frac{n-2}{n}\cdot\frac{r^2\pi}{8},$$

Summe beider:

$$\frac{\pi}{8}\left(\frac{s^2}{4}+\varrho^2\right) + \frac{s\cdot\varrho}{4} - \frac{r^2\pi}{4n} - \frac{r^2\pi}{8} + \frac{r^2\pi}{4n} = \frac{\pi}{8}\cdot r^2 + \frac{s\cdot\varrho}{4} - \frac{r^2\pi}{8} = \frac{s\cdot\varrho}{4} = \triangle ABC.$$

Die Summe beider Möndchen gibt wieder, indem bei der Addition $\pm\frac{\pi}{6}$ wegfällt,

$$\frac{c^2}{8}\sqrt{3},$$

den Inhalt des Dreiecks ABC wie oben.

Erkl. 443. Aus voriger Ableitung geht hervor, dass die elementare Berechnung des Inhaltes der Möndchen für genau die gleichen Centriwinkel $\alpha = \frac{180^0}{n}$ möglich ist, für welche die regulären Polygone der Tabelle in Antwort der Frage 33 ausgedrückt sind.

Aufgabe 99. Man soll die Lage des Aehnlichkeitspunktes finden für den besonderen Fall, dass einer der beiden Kreise eine Gerade oder ein Punkt geworden ist.

Auflösung. 1) Ist der eine Kreis zur Geraden geworden, so gibt es für ihn nur eine einzige Radienrichtung, nämlich senkrecht zu derselben Geraden. Die gleichgerichteten Radien des andern Kreises liegen in derjenigen dieser Geraden, welche als Centrale aufzufassen ist, und die Endpunkte derselben sind daher die Aehnlichkeitspunkte: und zwar kann der nächst der Geraden gelegene als innerer, der ferner gelegene als äusserer Aehnlichkeitspunkt aufgefasst werden, oder umgekehrt, je nachdem man das Innere des unendlich gross gewordenen Kreises auf die dem Mittelpunkte des gegebenen Kreises abgewendete Seite oder auf die andere Seite der Geraden verlegt denkt.

2) Ist der eine Kreis zum Punkt geworden, so fallen alle Radien, sowie deren Endpunkte mit diesem Punkte als Punkt der Centralen zusammen, und so muss der Punkt selbst auch als Aehnlichkeitspunkt: sowohl als äusserer wie als innerer aufgefasst werden.

Erkl. 444. Wenn der Radius eines Kreises unbegrenzt zunimmt, so entsteht aus dem Kreise eine Gerade als Kreis mit ∞ grossem Radius und unendlich fernem Mittelpunkt; nimmt der Radius dagegen unbegrenzt ab, so schrumpft der Kreis zu einem Punkte zusammen. Man nennt solche „entartete Kreise" oder auch „degenerierte Kreise".

Ist der eine Kreis zur Geraden degeneriert, so bleibt nebenstehende Betrachtung in gleichmässiger Giltigkeit, ob nun diese Gerade den noch übrigen Kreis nicht schneidet, berührt oder schneidet. — Ebenso bleibt bei der Entartung des einen Kreises zum Punkte dieser Punkt Aehnlichkeitspunkt beider Arten, ob er ausserhalb oder innerhalb oder auf der Peripherie des noch übrigen Kreises liegt.

Erkl. 445. Weitere besondere Fälle für die Lage der Aehnlichkeitspunkte ergeben sich, wenn beide Kreise gleichgross sind, oder wenn sie koncentrisch sind. Für den ersten Fall ist schon in Erkl. 440 abgeleitet, dass der äussere Aehnlichkeitspunkt der unendlich ferne Punkt der Centralen wird, der innere Aehnlichkeitspunkt deren Mittelpunkt. Für koncentrische Kreise ergibt sich ebenso, sowohl aus rechnender, als auch geometrischer Betrachtungsweise, dass der gemeinsame Mittelpunkt sowohl äusserer, als auch innerer Aehnlichkeitspunkt für beide Kreise ist.

Aufgabe 100. Man bestimme den Wert für die „gemeinschaftliche Potenz zweier Kreise in Bezug auf die Aehnlichkeitspunkte".

Auflösung. Nach Antwort der Frage 57 ist der Wert der gemeinsamen Potenz der zwei Kreise in Bezug auf den Aehnlichkeitspunkt:

Erkl. 446. Man hat bei der Betrachtung der Ziffernwerte sehr auseinanderzuhalten die äussere und innere gemeinschaftliche Potenz, denn der äussere Aehnlichkeitspunkt hat stets grössere t_1 und t_2, als der innere Aehnlichkeitspunkt. Daher hat auch die äussere gemeinschaftliche Potenz stets einen grösseren Wert als die innere gemeinschaftliche Potenz.

Erkl. 447. Benützt man die Zahlenwerte der Aufgabe 96, nämlich für hier (s. Figur 43 und 44):

$$r_1 = 7{,}5, \quad r_2 = 5, \quad c = 15,$$

so wird für S_a:

$$t_1 = 7{,}5\sqrt{35}, \quad t_2 = 5\sqrt{35},$$

also:

$$\frac{7{,}5}{5}(5\sqrt{35})^2 = \frac{5}{7{,}5}(7{,}5\sqrt{35})^2$$
$$= 5\cdot 7{,}5\cdot 35 = 1312{,}5,$$

und für S_i wird:

$$t_1 = \sqrt{11}, \quad t_2 = 1{,}5\sqrt{11},$$

also:

$$\frac{7{,}5}{5}(\sqrt{11})^2 = \frac{5}{7{,}5}(1{,}5\cdot\sqrt{11})^2 = 16{,}5$$

und zwar in Quadratmass von der Benennung, wie r_1 und r_2 in Längenmass angegeben sind.

$$\frac{r_1}{r_2}t_2^2 = \frac{r_2}{r_1}t_1^2,$$

wo t_1 und t_2 die Tangenten der Aehnlichkeitspunkte an die betrachteten Kreise sind. Nun ist t_1 und t_2 nach Antwort der Frage 95 für den Punkt S_a (dort AP_1 und AP_2):

$$t_1 = \frac{r_1}{r_1 - r_2}\sqrt{c^2 - (r_1 - r_2)^2},$$
$$t_2 = \frac{r_2}{r_1 - r_2}\sqrt{c^2 - (r_1 - r_2)^2}.$$

Also ist thatsächlich für S_a in Figur 43:

$$\frac{r_1}{r_2}t_2^2 = \frac{r_2}{r_1}t_1^2 = \frac{r_1\cdot r_2}{(r_1 - r_2)^2}[c^2 - (r_1 - r_2)^2].$$

Dagegen ist t_1 und t_2 nach Antwort der Frage 95 für den inneren Aehnlichkeitspunkt S_i (dort JR_1 und JR_2):

$$t_1 = \frac{r_1}{r_1 + r_2}\sqrt{c^2 - (r_1 + r_2)^2},$$
$$t_2 = \frac{r_2}{r_1 + r_2}\sqrt{c^2 - (r_1 + r_2)^2}.$$

Also auch hier für S_i in Figur 44:

$$\frac{r_1}{r_2}t_2^2 = \frac{r_2}{r_1}t_1^2 = \frac{r_1\cdot r_2}{(r_1 + r_2)^2}\cdot\sqrt{c^2 - (r_1 + r_2)^2}.$$

Aufgabe 101. Welche Lage muss ein Punkt haben, um als Mittelpunkt eines Berührungskreises für zwei gegebene, nicht ineinanderliegende Kreise dienen zu können.

Auflösung. Soll ein Punkt X Mittelpunkt eines Berührungkreises sein, der zwei gegebene Kreise $M_1 M_2$ ($r_1 > r_2$) gleichzeitig ausschliesst oder gleichzeitig einschliesst, so müssen die Abstände XM_1 und XM_2 eine konstante Differenz haben, deren Grösse $r_1 - r_2$ ist; soll der Berührungskreis X der Kreise $M_1 M_2$ den einen ausschliessen, den andern einschliessen, so müssen die Abstände XM_1 und XM_2 ebenfalls eine konstante Differenz haben, deren Grösse aber hier gleich $r_1 + r_2$ ist. Man kann also sagen: Der geometrische Ort für den Mittelpunkt eines Kreises, welcher zwei gegebene Kreise gleichartig (beide ausschliessend oder beide einschliessend) bezw. ungleichartig (den einen ausschliessend, den andern einschliessend) berührt, ist eine krumme Linie, deren Punkte von den Mittelpunkten der beiden gegebenen Kreise eine konstante Abstandsdifferenz haben, welche gleich der Differenz bezw. gleich der Summe der Radien ist.

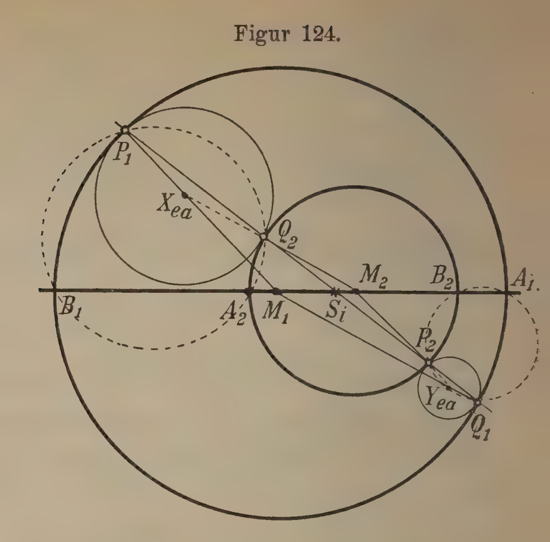
Erkl. 448. Eine krumme Linie, deren Punkte eine konstante Abstandsdifferenz von zwei festen Punkten haben, heisst eine Hyperbel, jene festen Punkte ihre Brennpunkte, die konstante Abstandsdifferenz ihre Hauptachse oder grosse Achse. Man erhält also für gleichartige Berührung eine Hyperbel und für ungleichartige Berührung eine zweite Hyperbel. Jede dieser Hyperbeln besteht aus zwei sogenannten Aesten, der eine enthält sämtliche Punkte für Punkte X_{aa}, der andere für Punkte X_{ee} (bezw. der eine für Punkte X_{ae}, der andere für Punkte X_{ea}: nach der Bezeichnungsweise der Antwort der Frage 58). In den unendlich fernen Punkten geht je ein Ast in den andern über, denn der unendlich ferne Punkt ist Mittelpunkt eines ∞ grossen Kreises: der gemeinsamen Tangente; und für diese ist keine Unterscheidung zwischen X_{aa} oder X_{ee} bezw. X_{ae} oder X_{ea} zu machen. (Daher hat man in den Senkrechten zu den gemeinsamen Tangenten auch sofort die sogenannten Asymptotenrichtungen dieser Hyperbeln.)

Aufgabe 102. Man soll die Ueberlegungen der Antworten der Fragen 56 bis 59 nachprüfen für zwei ineinanderliegende Kreise.

Auflösung. Liegen zwei Kreise ineinander, z. B. in Figur 123 und 124 M_2 in M_1, so entstehen wieder die Aehnlichkeitspunkte

Figur 123.

Figur 124.



Erkl. 449. Da Punkt S in beiden Figuren 123 und 124 innerhalb der Kreise M_1 und M_2 liegt, so ist t_1 bezw. t_2 diesesmal aufzufassen als Länge der senkrechten Halbsehne durch Punkt S. Der Wert ist wieder bestimmt durch die Gleichung:

$$t_{1,2}^2 = r_{1,2}^2 - \overline{M_{1,2}S}^2,$$

worin:

$$M_1 S_a = \frac{c r_1}{r_1 - r_2}, \quad M_2 S_a = \frac{c r_2}{r_1 - r_2},$$

$$M_1 S_i = \frac{c r_1}{r_1 + r_2}, \quad M_2 S_i = \frac{c r_2}{r_1 + r_2}.$$

Demnach wird für S_a:

$$t_1 = \frac{r_1}{r_1 - r_2}\sqrt{(r_1 - r_2)^2 - c^2},$$

$$t_2 = \frac{r_2}{r_1 - r_2}\sqrt{(r_1 - r_2)^2 - c^2};$$

dagegen für S_i:

$$t_1 = \frac{r_1}{r_1 + r_2}\sqrt{(r_1 + r_2)^2 - c^2},$$

$$t_1 = \frac{r_2}{r_1 + r_2}\sqrt{(r_1 + r_2)^2 - c^2};$$

also für S_a:

$$\frac{r_1}{r_2}\, t_2^2 = \frac{r_1}{r_2}\, t_1^2 = \frac{r_1 r_2}{(r_1 - r_2)^2}\,[(r_1 - r_2)^2 - c^2),$$

für S_i:

$$\frac{r_1}{r_2}\, t_2^2 = \frac{r_2}{r_1}\, t_1^2 = \frac{r_1 r_2}{(r_1 + r_2)^2}\,[(r_1 + r_2)^2 - c^2).$$

Erkl. 450. In Figur 123 und 124 sind von den Kreisen durch die vier inversen Punktepaare:

$P_1 A_1 Q_2 B_2$, $P_1 B_1 Q_2 A_2$, $Q_1 A_1 P_2 B_2$, $Q_1 B_1 P_2 A_2$ nur je zwei gezeichnet, um Undeutlichkeit der Figur zu vermeiden. Von den Berührungs- S_a und S_i durch die Verbindungsgeraden der Endpunkte parallel gerichteter Radien von gleicher Richtung $M_1 P_1 \parallel M_2 P_2$ in Fig. 123 oder von entgegengesetzter Richtung $M_1 P_1 \parallel M_2 P_2$ in Figur 124. Aus der Proportion:

$$SP_1 : SP_2 = SQ_1 : SQ_2 = SA_1 : SA_2$$
$$= SB_1 : SB_2 = r_1 : r_2$$

folgt wieder:

$$SP_1 \cdot SQ_2 = SP_2 \cdot SQ_1, \text{ u. s. w.}$$

und wegen:

$$t_2^2 = SP_2 \cdot SQ_2$$

folgt auch:

$$SP_1 \cdot SQ_2 = \frac{r_1}{r_2} \cdot t_1^2 = \frac{r_2}{r_1} \cdot t_1^2$$

für beide Figuren, ganz wie in Antwort der Frage 56. Also liegen auch hier je zwei Paare inverser Punkte auf einem Kreise; und für alle derartigen Kreise ist die Potenz des Punktes S die gleiche.

Bringt man die Radien nach P und Q zum Schnitt, so entstehen wieder in Figur 123 die gleichschenkligen Dreiecke mit Basis $P_1 Q_2$, Spitze X_{ee}, und mit Basis $P_2 Q_1$, Spitze Y_{ee}; in Figur 124 mit Basis $P_1 Q_2$, Spitze X_{ea}, und mit Basis $P_2 Q_1$, Spitze Y_{ea}. Es entstehen nämlich in Figur 123 und 124 Kreismittelpunkte mit je derselben Berührungsweise, nämlich für Aehnlichkeitspunkt S_a Kreise $X_{ee} Y_{ee}$, welche den kleineren Kreis einschliessen, aber vom grösseren eingeschlossen werden, für Aehnlichkeitspunkt S_i Kreise $X_{ea} Y_{ea}$, welche den kleineren Kreis ausschliessen, von dem grossen Kreise aber wieder eingeschlossen werden. Denn eine

kreisen gibt es je nur eine einzige Art $_{ee}$ oder $_{ea}$; es bleibt aber das Parallelogramm der Mittelpunkte $M_1 M_2 X Y$. Und durch Vergleichung der Seiten desselben entsteht für zwei Berührungskreise in denselben inversen Punkten: in Figur 123 $M_1 X = M_2 Y$ oder:

$$r_1 - \varrho = \varrho' - r_2; \quad \varrho' + \varrho = r_1 + r_2,$$

in Figur 124 $M_1 X = M_2 Y$ oder:

$$r_1 - \varrho = r_2 + \varrho'; \quad \varrho + \varrho' = r_1 - r_2.$$

Dagegen entsteht für Figur 123:

$$\begin{aligned} M_1 X &= r_1 - \varrho \\ M_2 X &= \varrho - r_2 \\ \hline M_1 X + M_2 X &= r_1 - r_2, \end{aligned}$$

für Figur 124:

$$\begin{aligned} M_1 X &= r_1 - \varrho \\ M_2 X &= r_2 + \varrho \\ \hline M_1 X + M_2 X &= r_1 + r_2. \end{aligned}$$

andere Berührung mit dem grossen Kreise ist überhaupt ausgeschlossen. Es behält also Satz 8 auch für diesen Fall vollständig seine Giltigkeit.

Aufgabe 103. Welche Lage muss ein Punkt haben, um als Mittelpunkt eines Berührungskreises für zwei ineinanderliegende Kreise dienen zu können?

Erkl. 451. Eine krumme Linie, deren Punkte eine konstante Abstandssumme von zwei festen Punkten haben, heisst eine Ellipse, die zwei festen Punkte ihre Brennpunkte, die konstante Abstandssumme ihre Hauptachse oder grosse Achse. Man erhält also zwei Ellipsen, je eine in Figur 123 und 124. Dieselben gehen durch die Mittelpunkte von $A_1 B_2$ bezw. $A_2 B_1$.

Erkl. 452. Für schneidende Kreise gibt es nur eine Art von Berührungskreisen, nämlich mit Mittelpunkten X_{aa} und X_{ee}; keine X_{ea} oder X_{ae}. Daher entsteht dann auch nur eine Hyperbel (keine Ellipse). Der eine Ast enthält die Mittelpunkte aller Kreise, welche beide gegebenen einschliessen, der andere die Mittelpunkte der ausschliessenden Berührungskreise, und im Innern beider Kreise die Mittelpunkte der von beiden Kreisen eingeschlossenen Kreise. Diese Hyperbel geht nämlich durch die Schnittpunkte beider Kreise hindurch.

Auflösung. Soll ein Punkt X Mittelpunkt eines Berührungskreises sein, der von dem Kreise M_1 in Figur 123 oder 124 eingeschlossen wird, und den Kreis M_2 ausschliesst bezw. einschliesst, so müssen die Abstände XM_1 und XM_2 eine konstante Summe haben, deren Grösse $r_1 + r_2$ bezw. $r_1 - r_2$ ist. Der geometrische Ort für den Mittelpunkt eines solchen Kreises ist also die krumme Linie, deren Punkte von den Mittelpunkten der gegebenen Kreise eine konstante Abstandssumme haben, welche gleich der Summe bezw. Differenz der Radien ist.

Aufgabe 104. Man soll einen Kreis konstruieren, welcher einen gegebenen Kreis in gegebenem Punkte P, und ausserdem einen zweiten gegebenen Kreis berührt.

Erkl. 453. Da die Gesamtheit aller Kreise, welche den gegebenen Kreis im Punkte P berühren, einen Kreisbüschel bildet, so kann man auch die Aufgabe 104 so aussprechen, dass von allen Kreisen dieses Büschels derjenige (oder diejenigen) ausgesucht werden sollen, welche zugleich den zweiten gegebenen Kreis berühren.

Erkl. 454. Als Figur zur vorstehenden Aufgabe kann angesehen werden Figur 45 (X_{aa}), 46 (X_{ae}), 123 (X_{ee}), 124 (X_{ea}). Zur Determination dient Figur 120. Liegt dort der Punkt P auf dem Bogen $P_1 Q_1$, so entsteht X_{ee} und X_{ea}, liegt P auf dem Bogen $R_1 S_1$, so entsteht X_{aa} und X_{ae}, liegt P auf dem Bogen $P_1 R_1$ oder

Auflösung. Konstruiert man die Aehnlichkeitspunkte beider Kreise, so trifft der Aehnlichkeitsstrahl des gegebenen Punktes P_1 den zweiten Kreis in demjenigen (potenzhaltenden) Punkte Q_2, in welchem der zweite Kreis berührt werden muss. Die Radien $M_1 P_1$ und $M_2 Q_2$ treffen sich im gesuchten Mittelpunkte X.

Man erhält stets zwei Lösungen, weil jeder Aehnlichkeitspunkt einen andern Berührungspunkt des zweiten Kreises liefert, nämlich der äussere für gleichartige, der innere für ungleichartige Berührung. Ob dies aus- oder einschliessende Berührung ist, hängt von der Lage der Kreise und von der Wahl des Punktes P auf seinem Kreise ab. Bei ineinanderliegenden Kreisen erscheint

$Q_1 S_1$, so entsteht X_{aa} und X_{ea}. Dabei bezieht sich jeweils der erste Buchstabe X auf den äusseren Aehnlichkeitspunkt, und der erste Buchstabe $_a$ oder $_e$ auf den ersten Kreis. Bei schneidenden Kreisen mögen $R_1 S_1$ die Schnittpunkte bedeuten, dann liefert P auf Bogen $P_1 Q_1$ wieder X_{ee} und X_{aa}, P auf Bogen $R_1 S_1$ liefert X_{ee} und X_{ae}, P auf Bogen $P_1 R_1$ oder $Q_1 S_1$ liefert X_{aa} und X_{ea}, wobei die $_e$ teils aktiv (einschliessend), teils passiv (eingeschlossen) zu verstehen sind.

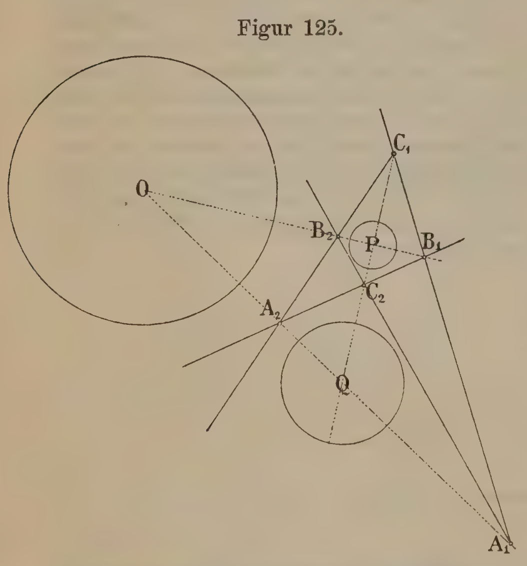
Erkl. 455. Weitere hierhergehörige Konstruktionsaufgaben sehe man in den dieser Encyklopädie angehörigen Büchern: Müller, Konstruktionsaufgaben, und Cranz, das Apollonische Berührungsproblem.

immer Figur 123 und 124. Bei schneidenden oder auseinanderliegenden Kreisen dagegen entscheidet die Lage der Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten, ob die Berührung beidemale einschliessende oder beidemale eingeschlossene oder verschiedene wird (vergl. Erkl. 454),

---

Aufgabe 105. Man soll für den „Satz von Monge" andere Beweisarten geben.

Figur 125.



Erkl. 456. Würde man die Produkte nebenstehender Proportionen in anderer Zusammenfassung bilden, nämlich erste, erste, zweite, — oder erste, zweite, erste, — oder zweite, erste, erste, — oder zweite, zweite, zweite, so entstehen die vier Produkte, welche dem Satze 22a des VII. Teiles dieses Lehrbuches (Umkehrung des Satzes von Ceva) entsprechen. Demnach gehen in Figur 125 auch durch je einen Punkt die Ecktransversalen des Dreiecks OQP nach $A_1 B_2 C_1$, $A_1 B_1 C_2$, $A_2 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$ nämlich die drei Geraden PA_1, QB_2, OC_1 oder PA_1, QB_1, OC_2 oder PA_2, QB_1, OC_1 oder PA_2, QB_2, OC_2. — Da die zwei Aehnlichkeitspunkte mit den zugehörigen Mittelpunkten jeweils harmonisch liegen, so ist dieser Umstand eine selbstverständliche Folge des nebenstehenden, wie in Antwort der Frage 59 des VII. Teiles dieses Lehrbuches bewiesen wurde.

Auflösung. I. Setzt man die Proportionen für die Aehnlichkeitspunkte an, so erhält man in Figur 125 für OQ mit $A_1 A_2$:

$$OA_1 : A_1 Q = OA_2 : A_2 Q = r_1 : r_2,$$

für QP mit $C_1 C_2$:

$$QC_1 : C_1 P = QC_2 : C_2 P = r_2 : r_3,$$

für PO mit $B_1 B_2$:

$$PB_1 : B_1 O = PB_2 : B_2 O = r_3 : r_1.$$

Multipliciert man von diesen zu je drei untereinander stehenden Proportionen jeweils die erste mit der ersten und ersten; oder die erste, zweite, zweite; oder die zweite, zweite, erste; oder die zweite, erste, zweite, so entsteht jedesmal auf der rechten Seite:

$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 : r_1 \cdot r_2 \cdot r_3,$$

also die Einheit; und demnach sind die links entstehenden Produkte jeweils einander gleich, nämlich:

$$1)\ OA_1 \cdot QC_1 \cdot PB_1 = A_1 Q \cdot C_1 P \cdot B_1 O,$$

d. h. $A_1 C_1 B_1$ auf einer Geraden;

$$2)\ OA_1 \cdot QC_2 \cdot PB_2 = A_1 Q \cdot C_2 P \cdot B_2 O,$$

d. h. $A_1 C_2 B_2$ auf einer Geraden;

$$3)\ OA_2 \cdot QC_2 \cdot PB_1 = A_2 Q \cdot C_2 P \cdot B_1 O,$$

d. h. $A_2 C_2 B_1$ auf einer Geraden;

$$4)\ OA_2 \cdot QC_1 \cdot PB_2 = A_2 Q \cdot C_1 P \cdot B_2 O,$$

d. h. $A_2 C_1 B_2$ auf einer Geraden.

Diese Produkte sind nämlich genau solche, wie sie dem Satze 21a des VII. Teiles dieses Lehrbuches (Umkehrung des Satzes von Menelaos) entsprechen für die Teilpunkte der Seiten des Dreiecks der Mittelpunkte OQP.

II. Denkt man sich durch die Mittelpunkte O, Q, P irgend drei parallele Radien gezogen und bezeichnet durch $D_1 D_2 D_3$ ihre Schnittpunkte etwa mit $A_1 B_1$ ohne Rücksicht auf die Lage von C_1, so folgt wegen B_1:

Erkl. 457. Man erkennt, dass der nebenstehend bewiesene Satz von Monge im Grunde identisch wird mit den früheren Sätzen der Aufgaben 208 und 209 des VI. Teiles dieses Lehrbuches, die sich in ähnlicher Form aussprechen lassen, nämlich: Die sechs Teilpunkte, welche die drei Seiten eines Dreiecks innen und aussen nach den Verhältnissen $m:n:p$ teilen, liegen viermal zu je dreien auf einer Geraden (deren Abstände von den drei Eckpunkten sich jedesmal verhalten wie $m:n:p$). Und analog: Die sechs Ecktransversalen, welche die Gegenseiten eines Dreiecks innen und aussen nach den Verhältnissen $m:n:p$ teilen, gehen viermal zu je dreien durch einen Punkt (z. B. die sechs Winkelhalbierenden durch die Mittelpunkte $M_0 M_1 M_2 M_3$ der In- und Ankreise.)

Erkl. 458. Man vergleiche zu nebenstehenden Beweisen die analogen Ausführungen in Antwort der Frage 46 und Aufgaben 91, 92 und 145 des VII. Teiles dieses Lehrbuches. Insbesondere findet man aus Figur 58 daselbst, dass wenn man an Stelle der dort gezeichneten ähnlichen und in perspektivischer Lage befindlichen Parallelogramme nunmehr Kreise einsetzt, dann einerseits die sechs Punkte $A_{12} B_{12} C_{12}$ viermal zu je dreien auf einer Geraden liegen, und anderseits die sechs Geraden OC_{12}, QB_{12}, PA_{12} viermal zu je dreien durch einen Punkt gehen.

$$OD_1 : QD_2 = B_1 O : B_1 Q = r_1 : r_2,$$

wegen A_1:

$$QD_2 : PD_3 = A_1 Q : A_1 P = r_2 : r_3.$$

Durch gliedweise Multiplikation folgt bei Wegfall der Grössen QD_2 und r_2:

$$OD_1 : PD_3 = r_1 : r_3.$$

Folglich sind D_1 und D_3 ähnlich liegende Punkte der Figuren O und P, also muss die Verbindungslinie $D_1 D_3$, d. h. $A_1 B_1$ durch den Aehnlichkeitspunkt C_1 hindurchgehen. Und ebenso wird für die Punkte $A_1 B_2 C_2$, $A_2 B_2 C_1$, $A_2 B_1 C_2$ bewiesen, dass sie auf einer Geraden liegen.

Aufgabe 106. Man soll einen Punkt suchen, von welchem aus zwei gegebene Kreise unter gegebenem gleichem (z. B. rechtem) Winkel gesehen werden.

Erkl. 459. Die Aufgabe kann 0, 1, 2 Lösungen haben: keine Lösung, wenn der vorgeschriebene Winkel grösser als der Winkel der inneren oder kleiner als der Winkel der äusseren gemeinsamen Tangenten der beiden gegebenen Kreise ist; je eine Lösung, wenn der Winkel gleich einem dieser beiden Grenzwinkel ist (und zwar ist der gesuchte Punkt dann entweder der innere oder der äussere Aehnlichkeitspunkt selbst); zwei Lösungen (symmetrisch zur Centralen gelegen), wenn der gegebene Winkel zwischen den beiden gegebenen Grenzwinkeln liegt.

Auflösung. Nach dem Satze 10 gibt es zwei Punkte von der verlangten Eigenschaft: Man findet sie als Schnittpunkte irgend zweier der folgenden drei Kreise: 1) Apollonischer Kreis, welcher die Centrale $M_1 M_2$ im Verhältnis $r_1 : r_2$ harmonisch senkrecht teilt; 2) Ortskreis, für dessen Punkte der erste Kreis den gegebenen Winkel zum Tangentenwinkel hat; 3) Ortskreis, für dessen Punkte der zweite Kreis den gegebenen Winkel zum Tangentenwinkel hat.

Möglich ist die Aufgabe überhaupt nur bei nicht ineinanderliegenden Kreisen; denn bei solchen wäre für jeden äusseren Punkt der Tangentenwinkel an den grösseren Kreis grösser als der an den eingeschlossenen Kreis.

Aufgabe 107. Man soll einen Punkt suchen, von welchem aus drei gegebene Kreise unter gleichgrossen Winkeln gesehen werden.

Erkl. 460. Während bei zwei Kreisen unendlich viele Punkte mit gleichgrossen Tangentenwinkeln entstehen, sind es bei drei Kreisen nur noch zwei Punkte. Daher kann bei zwei Kreisen die Aufgabe so gestellt werden, dass die Grösse der zwei Winkel vorgeschrieben

Auflösung. Man teile die drei Centralstrecken harmonisch im Verhältnis der zugehörigen Radien, und errichte die Apollonischen Kreise über den Verbindungsstrecken der Teilpunkte, d. h. über der Verbindungsstrecke der Aehnlichkeitspunkte für perspektivische Lage. Dann haben die Schnittpunkte dieser Kreise nach Satz 13 die verlangte Eigenschaft.

wird, während bei drei Kreisen schon die Gleichheit mit dem dritten Winkel die Aufgabe beschränkt.

Aufgabe 108. Welche Verallgemeinerungen gestatten die Sätze 11 und 13?

Erkl. 461. Die nebenstehenden Betrachtungen gelten durchweg sowohl für den Punkt S_1 als S_2. Man führe also die Ueberlegungen durch erst in Hinsicht des Punktes S_1, und dann wiederholt für den Punkt S_2. Deshalb ist auch im nebenstehenden der Index weggelassen, weil für beide Indices der Inhalt Geltung hat.

Erkl. 462. Während in den bisherigen Untersuchungen das Vorhandensein ähnlicher Figuren von vornherein angenommen war, ist in nebenstehender Ueberlegung die Entstehungsweise ähnlicher Figuren im allgemeinsten Sinne vorgeführt. Man erkennt dabei, dass zur Festlegung der ähnlichen Beziehung zwischen zwei Figurensystemen im allgemeinen drei Bestimmungsstücke gehören: 1) der Anfangspunkt oder Ausgangspunkt (auch Nullpunkt) des Systems; 2) das Streckenverhältnis entsprechender Längengrössen — oder was an deren Stelle treten kann — die vorherige Bestimmung des Aehnlichkeitspunktes; 3) die Angabe der Drehungsrichtung von einer ursprünglichen Ausgangsrichtung aus.

Erkl. 463. Ein weiteres Ergebnis der vorliegenden Betrachtung ist der Satz:

Satz. Wenn zwei Figurensysteme mit demselben dritten ähnlich sind, so sind sie miteinander ähnlich; — oder: Wenn ein Figurensystem mit zwei andern ähnlich ist, so sind diese auch miteinander ähnlich.

Erkl. 464. Die ähnlichen Figurensysteme M_2 und M_3 in Figur 126 können in perspektivische Lage mit M_1 gebracht werden. Dazu bedarf es a) bei gleichwendiger Aehnlichkeit: der Umdrehung des Systems M_2 um den Winkel $M_2S_1M_1$, des Systems M_3 um den Winkel M_3SM_1 gegen SM_1 hin — oder um deren Nebenwinkel in entgegengesetzter Richtung. — b) Bei ungleichwendiger Aehnlichkeit bedarf es: der Umklappung des Systems M_2 um die Winkelhalbierende von M_2SM_1, des Systems M_3 um die Halbierende des Winkels M_3SM_1 — oder um die Halbierungslinie von deren Nebenwinkel. — Im ersteren Falle wird jeweils S äusserer im letzteren innerer Aehnlichkeitspunkt.

Auflösung. Betrachtet man $M_1M_2M_3$ in Figur 126 nicht bloss als Mittelpunkte der Kreise $M_1M_2M_3$, sondern als Mittelpunkte oder Ausgangspunkte dreier „ebenen Figurensysteme“, die in derselben Zeichenebene liegen, und bestimmt man die Strecken M_1S, M_2S, M_3S als entsprechende Strecken dieser drei Systeme, so wird der Punkt S ein sich selbstentsprechender gemeinsamer Punkt aller drei Systeme, und so entsprechen einander die Kreise um $M_1M_2M_3$, wenn ihre Radien sich verhalten wie:

$$M_1S : M_2S : M_3S \text{ u. s. w.}$$

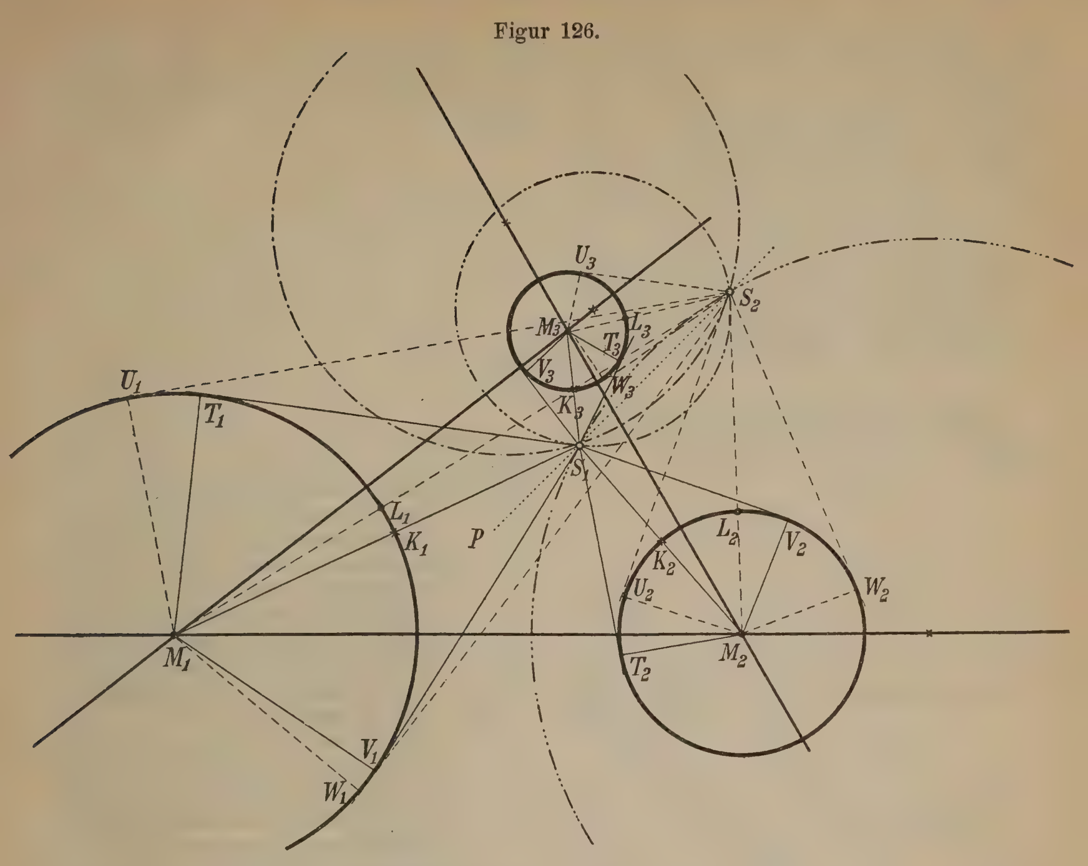
Nach diesen Festsetzungen hat man aber immer noch die Auswahl der Drehungsrichtung vom ursprünglichen Strahl MS aus: ob alle drei Systeme gleichwendig, oder je zwei gleichwendig, das dritte ungleichwendig gedreht werden sollen.

Hiernach erhält man als entsprechende Punkte der drei Systeme solche, deren Abstände von $M_1M_2M_3$ sich verhalten wie $M_1S : M_2S : M_3S$, und deren Verbindungsstrecken nach $M_1M_2M_3$ mit M_1S, M_2S, M_3S gleiche Winkel in vorgeschriebener Drehungsrichtung bilden. Entsprechende Geraden der drei Systeme sind solche, die entsprechende Punktepaare verbinden, entsprechende Kreise u. s. w. sind Kreise u. s. w. über entsprechenden Strecken der drei Figurensysteme als Durchmessern. Dabei werden die drei Figurensysteme einander ähnlich, da die entsprechenden Figuren in den drei Systemen gleichgrosse Winkel und gleiche Seitenverhältnisse haben.

Aufgabe 109. Man soll zu gegebenen ähnlichen Figurensystemen bezw. zu gegebenen Kreisen die Beziehungen der Aehnlichkeitspunkte untersuchen.

Auflösung. I) Sind zwei ähnliche Figurensysteme vollständig gegeben, so gibt es nach Antwort der Frage 49 des VII. Teiles dieses Lehrbuches einen Aehn-

Figur 126.



Erkl. 465. Gegenüber vollständig gegebenen Figurensystemen nimmt der Kreis eine ganz veränderte Stellung ein, weil die Wahl entsprechender Peripheriepunkte willkürlich und zugleich die beiderlei Umdrehungsrichtungen gleichwertig sind. Denkt man sich in Figur 22 des VII. Teiles dieses Lehrbuches über den Strecken A_1B_1 und A_2B_2 ähnliche (ungleichseitige) Dreiecke konstruiert, so müssen bei ähnlicher Beziehung sich die Strecken A_1B_1 und A_2B_2 entsprechen, also entweder S_g oder S_u zum Aehnlichkeitspunkt werden, je nachdem diese Dreiecke gleich- oder ungleichwendig sind. Denkt man sich aber über A_1B_1 und A_2B_2 gleichschenklige Dreiecke (allgemein symmetrische), so gelten schon beide Punkte S_g und S_u. Nimmt man vollends Kreise über A_1B_1 und A_2B_2 als Durchmessern, so können diese sich nicht nur mit A_1B_1 und A_2B_2 als zugeordneten Durchmessern entsprechen, sondern auch mit jedem zu A_1B_1 willkürlich gewählten andern Durchmesser des zweiten Kreises. Und hierin liegt dann die grosse Verallgemeinerung von jener Figur zu obiger Fig. 126, wo einander zugeordnet werden können die Durchmesser (Halbmesser) T_1M_1, T_2M_2, T_3M_3 oder T_1M_1, T_2M_2, V_3M_3 oder T_1M_1, V_2M_2, T_3M_3 oder T_1M_1, V_2M_2, V_3M_3 — alles mit Aehnlichkeitspunkt S_1; und ebenso vier verschiedene Gruppierungen für S_2.

lichkeitspunkt, wenn die Systeme gleichwendig, und einen andern Aehnlichkeitspunkt, wenn die Systeme ungleichwendig ähnlich sind. Dabei können die beiden ähnlichen Systeme entweder perspektivisch liegen oder in schiefer Lage.

Sind dagegen nur zwei Kreise gegeben, so gibt es stets zwei Aehnlichkeitspunkte für perspektivische Lage und unendlich viele Aehnlichkeitspunkte für schiefe Lage. Und dabei können die Kreise sowohl als gleichwendige, als auch als ungleichwendige Figuren betrachtet werden.

II) Sind drei ähnliche Figurensysteme vollständig gegeben, so gibt es im allgemeinen keinen selbstentsprechenden Punkt derselben, sondern nur drei verschiedene Punkte, die in je zweien derselben gemeinsam sind.

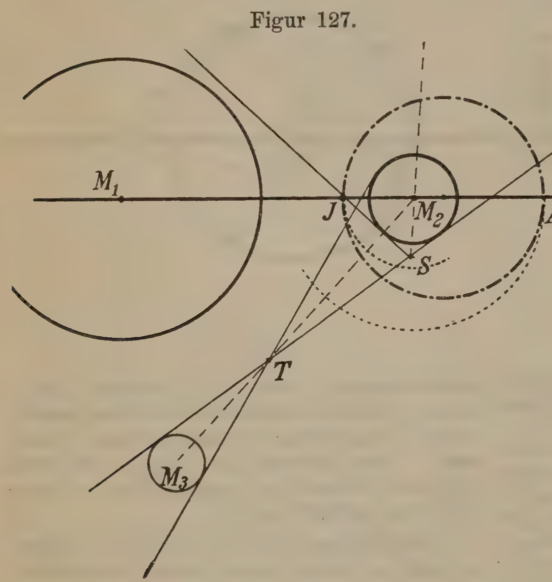
Sind dagegen drei Kreise gegeben, so gibt es immer noch zwei Punkte, von denen entweder der eine oder der andere als Aehnlichkeitspunkt auftreten kann. Ist die Umlaufsrichtung der Kreise festgelegt, so gilt

Erkl. 466. Treten an Stelle der Kreise die regulären Polygone des Satzes 12, so erscheint statt der Auswahl unter den unendlich vielen Punkten der Kreisperipherie nur noch die Auswahl unter den n Eckpunkten des Vielecks. Da diese im allgemeinen in beliebiger Lage zu denken sind, so hat man für zwei Polygone nicht die unendlich vielen Aehnlichkeitspunkte, wie für zwei Kreise, aber auch nicht nur einen, wie für vollständige Figurensysteme, sondern n Aehnlichkeitspunkte für jede verschiedene Zuordnung mit gleicher oder ungleicher Umlaufsrichtung um das n-Eck. Für drei Polygone dagegen besteht im allgemeinen überhaupt kein gemeinsamer selbstentsprechender Punkt.

jeder Punkt einmal, ist sie noch willkürlich, so gilt jeder Punkt viermal, nämlich für die verschiedenen Zusammenstellungen der gleichen oder ungleichen Umlaufsrichtungen.

Aufgabe 110. Man soll die Fälle aufsuchen, wo keine gemeinsamen Aehnlichkeitspunkte dreier Kreise bestehen.

Figur 127.



Auflösung. Geht man von den zwei ersten Kreisen $M_1 M_2$ aus, so trennt der Apollonische Kreis über der Verbindungsstrecke ihrer Aehnlichkeitspunkte J und A (Fig. 127) die Punkte, deren Tangentenwinkel an M_1 grösser oder kleiner ist, als der an M_2. Wählt man also einen dritten Kreis M_3 entweder so, dass sein kleinster gemeinsamer Tangentenwinkel mit M_2 schon grösser ist, als der grösste gemeinsame von M_1 und M_2 — oder so, dass sein grösster gemeinsamer Tangentenwinkel mit M_2 noch kleiner ist als der kleinste gemeinsame von M_1 und M_2, so kann es keinen gleichgrossen Tangentenwinkel an alle drei Kreise geben. Das erstere tritt aber ein, wenn der äussere Aehnlichkeitspunkt von $M_2 M_3$ näher bei M_2 ist, als Punkt J; das letztere, wenn der innere Aehnlichkeitspunkt von $M_2 M_3$ ferner von M_2 ist, als Punkt A.

Man kann diese Beziehung auch durch Rechnung feststellen. Bezeichnet man mit $r_1 r_2$ die gegebenen, mit r_3 den unbekannten dritten Radius, ferner mit c und a die bekannten Seiten $M_1 M_2$ und $M_2 M_3$ des Dreiecks $M_1 M_2 M_3$, so ist nach früherem:

$$M_2 J = \frac{c \cdot r_2}{r_1 + r_2}, \quad M_2 S = \frac{a \cdot r_2}{r_3 - r_2};$$

daher wird obige erste Bedingung ausgedrückt durch die „Ungleichung":

$$\frac{c}{r_1 + r_2} > \frac{a}{r_3 - r_2};$$

$$c r_3 > a (r_1 + r_2) + c r_2, \text{ also:}$$

$$r_3 > \frac{a}{c} (r_1 + r_2) + r_2.$$

Die zweite Bedingung ergibt:

Erkl. 467. In Figur 127 ist für jeden Punkt innerhalb des koncentrischen Kreises um M_2 mit Radius $M_2 J$ der Tangentenwinkel grösser als der von J aus. Dieses ist aber der grösste mögliche gemeinsame Tangentenwinkel von M_1 und M_2. Wenn also Punkt S äusserer Aehnlichkeitspunkt zwischen M_2 und M_3 wird, d. h. wenn der Mittelpunkt M_3 auf der Geraden SM_2 zwischen S und M oder ausserhalb M_2 liegt, so gibt es keine gleichen Tangentenwinkel, also keinen gemeinsamen Aehnlichkeitspunkt für $M_1 M_2 M_3$. — Ebenso ist für jeden Punkt ausserhalb des koncentrischen Kreises um M_2 mit Radius $M_2 A$ der Tangentenwinkel kleiner als der von A aus. Dieser ist aber der kleinste mögliche gemeinsame Tangentenwinkel von M_1 und M_2. Wenn also Punkt T

innerer Aehnlichkeitspunkt zwischen M_2 und M_3 wird, d. h. wenn der Mittelpunkt M_3 auf der Geraden $M_2 T$ ausserhalb T liegt, so gibt es keine gleichen Tangentenwinkel, also keinen gemeinsamen Aehnlichkeitspunkt für $M_1 M_2 M_3$.

Erkl. 468. Durch die hier vorliegende Untersuchung erledigt sich auch die in Erkl. 131 des VI. Teiles offengelassene Frage, wann die drei Apollonischen Kreise, welche drei Seiten eines Dreiecks nach dem Verhältnisse $m:n:p$ senkrecht teilen, einander treffen oder nicht. Setzt man a und c für zwei dieser Seiten, r_1 und r_2 für m und n, so ist p die Grösse r_3. Man sieht also, dass diese drei Apollonischen Kreise einander schneiden, wenn a bezw. r_3 innerhalb, nicht schneiden, wenn a bezw. r_3 ausserhalb der vorgeschriebenen Grenzen liegt.

Erkl. 469. Es kann auch der Fall eintreten, dass ein einziger gemeinsamer Aehnlichkeitspunkt für die Kreise auftritt. Dies ist derselbe Fall, wie wenn die drei Apollonischen Kreise alle einander berühren. Dazu ist nötig, dass a bezw. c mit einem der Grenzwerte selbst zusammenfällt, dass also der Punkt S der Figur 127 auf dem Kreise mit Radius $M_2 J$ oder der Punkt T auf dem Kreise mit Radius $M_2 A$ liegt. Dann ist r_3 gleich:

$$\frac{a}{c}(r_1 + r_2) + r_2$$

oder gleich:

$$\frac{a}{c}(r_1 - r_2) - r_2.$$

$$M_2 A = \frac{c r_2}{r_1 - r_2}, \qquad M_2 T = \frac{a r_2}{r_2 + r_3};$$

daher:

$$\frac{c}{r_1 - r_2} < \frac{a}{r_2 + r_3};$$

$$c r_3 < a(r_1 - r_2) - c r_2,$$

also:

$$r_3 < \frac{a}{c}(r_1 - r_2) - r_2.$$

Somit wären also auch rechnungsmässig die Grenzen festgestellt zwischen welchen r_3 gewählt sein muss, um das Vorhandensein der Aehnlichkeitspunkte möglich bezw. unmöglich zu machen. — Ebensolche Grenzen erhält man auch bei gegebenem r_3 für die Grösse a, indem oben entweder:

$$a < \frac{c(r_3 - r_2)}{r_1 + r_2}$$

oder:

$$a > \frac{c(r_2 + r_3)}{r_1 - r_2}$$

sein muss. Es gibt also für jede vorgeschriebene Entfernung $M_2 M_3$ eine Grenze für den Radius und für jeden vorgeschriebenen Radius eine Grenze für die Centralstrecke $M_2 M_3$.

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 111. Die von den Punkten eines Kreises nach einem festen Punkte S führenden Strecken werden geteilt im Verhältnisse $0, \pm 1, \infty$ u. s. w. Man untersuche die hierbei entstehenden Abbildungen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 93.

Aufgabe 112. Man soll bloss mit Lineal die gemeinsamen Tangenten zweier Kreise konstruieren.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 94.

Aufgabe 113. Man bestimme auf den gemeinsamen Tangenten zweier Kreise den Wert der Tangentenabschnitte zwischen Berührungspunkten und Schnittpunkten.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 95.

Aufgabe 114. Man berechne die Streckengrössen der gemeinsamen Tangenten zweier Kreise mit Radien 3,5 und 8,5, Centrale 13.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 96.

Aufgabe 115. Man soll die Ergebnisse der Aufgabe 98 nachprüfen auf Grund der Erkl. 442.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 98.

Aufgabe 116. Man bestimme die Aehnlichkeitspunkte für zwei zu P oder g entartete Kreise.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 99.

Aufgabe 117. Man bestimme die gemeinschaftliche Potenz für die Kreise der Aufgabe 113.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 100.

Aufgabe 118. Man suche die Mittelpunkte der kleinsten Berührungskreise zweier auseinanderliegenden Kreise.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 101.

Aufgabe 119. Man soll die bisherigen Aufgaben für koncentrische Kreise durchführen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 102.

Aufgabe 120. Man suche die grössten und kleinsten Berührungskreise von ineinanderliegenden Kreisen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 103.

Aufgabe 121. Dieselbe Aufgabe für schneidende Kreise zu lösen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 103 und Erkl. 452.

Aufgabe 122. Man soll Kreise konstruieren, welche eine Gerade und einen Kreis berühren und zwar:

α) erstere oder

β) letzteren in bestimmtem Punkte.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 104.

Aufgabe 123. Wieviele Aehnlichkeitspunkte zwischen drei Kreisen müssen wirklich konstruiert werden, um alle sechs mit Lineal zu finden?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 105.

Aufgabe 124. Man bestimme, welche Winkelgrössen der Tangentenwinkel zweier Kreise innerhalb und ausserhalb des Apollonischen Kreises auftreten.

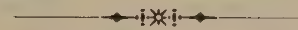
Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 106.

Aufgabe 125. Welcher Grenzfall erlaubt gleiche Tangentenwinkel an drei Kreise?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 107.

Aufgabe 126. Man soll Zahlenbeispiele aufstellen für drei Kreise, welche keinen gemeinsamen Aehnlichkeitspunkt besitzen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 110.



5) Aufgaben über die Potenzlinien oder Chordalen.

(Zu Abschnitt 5.)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 127. Man bestimme, nach welchen Teilungsverhältnissen die auf der Centralen zweier Kreise gelegenen Strecken durch die Potenzlinie geteilt werden.

Auflösung. Werden mit C der Fusspunkt der Potenzlinie, mit A_1A_2 und B_1B_2 die durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt zugeordneten Scheitelpunkte der Kreise bezeichnet (wie z. B. in Figur 129), so ist wegen der gleichen Potenz des Punktes C für beide Kreise:

$$CA_1 \cdot CB_1 = CA_2 \cdot CB_2,$$

also:

$$CA_1 : CA_2 = CB_2 : CB_1,$$

oder auch:

$$CA_1 : CB_2 = CA_2 : CB_1.$$

Durch „korrespondierende Addition“ homologer Glieder entsteht aus der ersten Proportion:

$$(CA_1 + CA_2) : (CB_1 + CB_2) = CA_1 : CB_2 = CA_2 : CB_1$$

und aus der zweiten Proportion:

$$(CA_1 + CB_2) : (CA_2 + CB_1) = CA_1 : CA_2 = CB_2 : CB_1.$$

Durch Einsetzung der Werte:

$$CA_1 + CA_2 = A_1A_2, \quad CB_1 + CB_2 = B_1B_2,$$
$$CA_1 + CB_2 = A_1B_2, \quad CB_1 + CA_2 = A_2B_1$$

erhält man die beiden Beziehungen:

$$CA_1 : CA_2 = CB_2 : CB_1 = A_1B_2 : A_2B_1,$$
$$CA_1 : CB_2 = CA_2 : CB_1 = A_1A_2 : B_1B_2.$$

Erkl. 470. Nennt man A_1A_2, B_1B_2 ähnlich liegende Scheitel des äusseren, A_1B_2 und A_2B_1 ähnlich liegende Scheitel des inneren Aehnlichkeitspunktes, so kann man das nebenstehende Ergebnis in die Worte kleiden: Die beiden Abstandsstrecken der ähnlich liegenden Scheitel jedes Aehnlichkeitspunktes werden durch die Potenzlinie im gleichen Verhältnis geteilt, nämlich im Verhältnis der beiden Abstandsstrecken der ähnlich liegenden Scheitel des andern Aehnlichkeitspunktes.

Erkl. 471. Da die Stücke:

$$M_1C = \frac{c^2 + r_1^2 - r_2^2}{2c},$$

$$M_2C = \frac{c^2 + r_2^2 - r_1^2}{2c}$$

bekannt sind, und

$$CA_1 = M_1C + r_1, \quad CA_2 = M_2C - r_2,$$
$$CB_1 = M_2C - r_1, \quad CB_2 = M_2C + r_2,$$

so müssen sich nebenstehende Ergebnisse auch durch reine Rechnung finden lassen, z. B.:

$$\begin{aligned} CA_1 : CA_2 &= \left(\frac{c^2 + r_1^2 - r_2^2}{2c} + r_1\right) : \left(\frac{c^2 + r_2^2 - r_1^2}{2c} - r_2\right) \\ &= (c^2 + 2cr_1 + r_1^2 - r_2^2) : (c^2 - 2cr_2 + r_2^2 - r_1^2) \\ &= [(c + r_1)^2 - r_2^2] : [(c - r_2)^2 - r_1^2] \\ &= (c + r_1 + r_2)(c + r_1 - r_2) : (c - r_2 + r_1)(c - r_2 - r_1) = (c + r_1 + r_2) : (c - r_2 - r_1) \\ &= (M_1M_2 + M_1A_1 + M_2B_2) : (M_1M_2 - M_1B_1 - M_2A_2) = A_1B_2 : A_2B_1. \end{aligned}$$

Aufgabe 128. Man untersuche die Bewegung der Potenzlinie, wenn die zwei Kreise einander entgegenbewegt werden.

Auflösung. 1) Bei zwei auseinanderliegenden Kreisen trifft die Centrale keinen

Erkl. 472. In den ersten vier Fällen nebenstehender Antwort macht die Potenzlinie die Bewegung des bewegten Kreises in gleicher Richtung mit. Vom vierten zum fünften Falle ist eine Umkehr dieser Bewegung eingetreten. Der Augenblick der Umkehr ist derjenige, wo die Sehnen beider Kreise am nächsten am Mittelpunkt des festen Kreises, also am grössten gewesen ist. Dies trifft zu, wenn diese Sehne im kleineren der beiden Kreise Durchmesser ist. Dabei ist es gleichwertig, ob der grössere Kreis gegen den kleineren, oder der kleinere gegen den grösseren bewegt wurde.

Erkl. 473. Lässt man den Kreis M_1 feststehen, so ergeben sich nebenstehende Ergebnisse alle auch aus dem Werte:

$$M_1 C = \frac{c^2 + r_1^2 - r_2^2}{2c} = \frac{c}{2} + \frac{r_1^2 - r_2^2}{2c}.$$

Daraus erkennt man, das C stets auf der dem kleineren Kreise zugehörigen Hälfte von c liegt. Sucht man (durch quadratische Gleichung) das Minimum dieses Wertes $M_1 C$, so findet man als Minimum:

$$M_1 C = c = \sqrt{r_1^2 - r_2^2}.$$

Und dies ist eben der Wert von c, wenn die Sehne der schneidenden Kreise Durchmesser ist. Denn dann liegt C im Punkte M_2 und $M_1 M_2$ ist Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit Hypotenuse r_1, Kathete r_2.

der beiden Kreise, sondern schneidet deren Centralstrecke.

2) Rücken die Kreise einander näher, so bleibt stets die Potenzlinie zwischen den Kreisen.

3) Kommt es zur ausschliessenden Berührung der Kreise, so fällt die Potenzlinie in die gemeinsame Tangente.

4) Schneiden einander die Kreise, so fällt die Potenzlinie in die gemeinsame Sehne und rückt als solche bei fortdauernder Annäherung der Kreismittelpunkte durch den Mittelpunkt des kleineren Kreises hindurch.

5) Kommt es zur einschliessenden Berührung, so fällt die Potenzlinie wieder in die gemeinsame Tangente.

6) Für ineinanderliegende Kreise ist die Potenzlinie wieder eine ausserhalb des grösseren Kreises liegende Gerade.

Aufgabe 129. Man soll auf möglichst einfache Weise die Potenzlinie zweier Kreise konstruieren.

Erkl. 474. Der Beweis für die Richtigkeit der ersten drei Aussagen nebenstehender Auflösung ist bereits im Satze 14a gegeben. Für den letzten Teil ist derselbe folgendermassen zu führen, etwa nach Figur 124 mit dem Kreise durch $A_1 B_2 P_2 Q_1$. Ist F der Schnittpunkt der Sehnen $A_1 Q_1$ und $B_2 P_2$, so ist wegen des Kreises $A_1 B_2 P_2 Q_1$:

$$FA_1 \cdot FQ_1 = FB_2 \cdot FP_2.$$

Ersteres ist aber auch Potenz von F für Kreis M_1, letzteres für Kreis M_2. Also liegt F auf der Potenzlinie, und die Senkrechte von F auf die Centrale ist die gesuchte Ortslinie.

Erkl. 475. Es bedarf keines weiteren Beweises, dass mit dem Verfahren des vierten Falles jeder der drei andern auch behandelt werden könnte; und dies kann z. B. im dritten Falle, oder wenn drei Kreise gegeben sind, ebenfalls mit Vorteil angewandt werden.

Auflösung. 1) Bei schneidenden Kreisen zeichnet man die gemeinsame Sehne.

2) Bei berührenden Kreisen zeichnet man die gemeinsame Tangente.

3) Bei auseinanderliegenden Kreisen zeichnet man zwei gemeinsame Tangenten und verbindet deren Mittelpunkte; oder eine gemeinsame Tangente und fällt von deren Mittelpunkt eine Senkrechte auf die Centrale der Kreise.

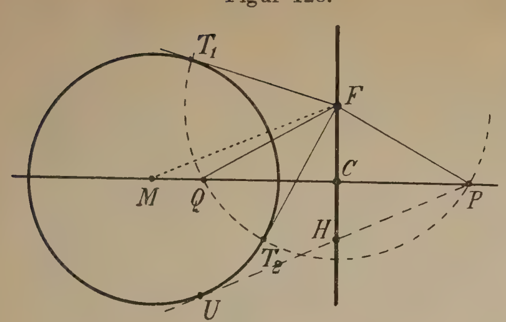
4) Bei ineinanderliegenden Kreisen zeichnet man einen Schnittkreis, der beide trifft, konstruiert den Schnittpunkt der gemeinsamen Sehnen und fällt von diesem eine Senkrechte auf die Centrale; oder man zieht zwei Schnittkreise und verbindet die Schnittpunkte der gemeinsamen Sehnen.

Aufgabe 130. Man soll untersuchen, was aus der Potenzlinie wird, wenn einer der Kreise zum Punkte oder zur Geraden entartet.

Auflösung. 1) Wird ein Kreis zum Punkte (P in Figur 128), so ist die Tangente an denselben gleich der Verbindungs-



Figur 128.



Erkl. 476. Die Potenzlinie für einen Punkt und einen Kreis hat wichtige Geltung für die späteren Konstruktionsaufgaben von Kreisen, welche durch einen Punkt gehen und eine Gerade berühren. Die Werte für MC und PC sind genau dieselben, wie die früheren M_1C und M_2C, wenn in denselben $r_1 = r$, $r_2 = 0$ gesetzt wird. Liegt der Punkt ausserhalb des Kreises, so liegt die Potenzgerade ebenfalls ausserhalb; für einen Punkt der Peripherie ist die Tangente Potenzgerade, für einen Punkt innerhalb des Kreises ist die Potenzgerade wieder ausserhalb des Kreises.

Erkl. 477. Für die Punkte P und Q in Figur 128 gilt die Beziehung:

$$\overline{FT}^2 = \overline{FP}^2 = \overline{FQ}^2 = \overline{FM}^2 - r^2;$$

und ebenso:

$$CP = CQ = \sqrt{\overline{CM}^2 - r^2}.$$

Lässt man hierin alle Entfernungen vom Anfangspunkt M ausgehen, so entsteht:

$$(MP - MC)^2 = (MC - MQ)^2 = \overline{CM}^2 - r^2,$$

oder:

$$MP^2 - 2\,MP \cdot MC + MC^2 = MC^2 - r^2,$$

$$MP(2\,MC - MP) = r^2.$$

Setzt man hier:

$$2\,MC = MC + MC = MP - PC + MQ + CQ,$$

so wird:

$$r^2 = MP \cdot MQ,$$

so dass P und Q Polpunkte im später gebrauchten Sinne werden.

strecke, es muss also für einen Punkt der Potenzlinie die Strecke FP gleich der Tangente FT an den Kreis M sein. Demnach stimmt zunächst die Konstruktion der Potenzlinie nach Aufgabe 129, indem die Halbierungspunkte H der von P an den Kreis M gezogenen Tangenten PU auf dieser Potenzlinie liegen müssen. Nun ist, wenn $PM = c$ gesetzt wird:

$$PU = \sqrt{c^2 - r^2},$$

$$PH = \frac{\sqrt{c^2 - r^2}}{2};$$

und weil:

$$\triangle PCH \sim PUM,$$

auch:

$$PC : PH = PU : PM,$$

d. h.:

$$PC = \frac{PH \cdot PU}{PM} = \frac{c^2 - r^2}{2c};$$

$$MC = c - PC = \frac{c^2 + r^2}{2c}.$$

Man erkennt durch die Zeichnung des Kreises um F mit Radius FP, dass auf der Centralen noch ein Punkt Q liegt, dessen Abstand von F ebenfalls gleich FT ist, für welchen also CF ebenfalls als Potenzlinie zum Kreise M auftritt.

2) Für einen Kreis und eine Gerade muss die letztere selbst als Potenzgerade angesehen werden.

Aufgabe 131. Man soll beweisen, dass auf Tangenten in potenzhaltenden Punkten zweier Kreise durch ihren Schnittpunkt gleichlange Abschnitte gebildet werden.

Erkl. 478. Auf der Potenzlinie PC liegen nicht nur die gemeinsamen Schnittpunkte der Tangenten in $T_1V_1\,T_2V_2$, sondern auch die Schnittpunkte der Tangenten in U_1U_2 bezw. W_1W_2. Denn es gibt auch je einen Berührungskreis, der die Kreise M_1M_2 in U_1U_2 ausschliessend, in W_1W_2 einschliessend berührt.

Auflösung. Betrachtet man als potenzhaltende Punkte T_1 und T_2 in Figur 129, so sind die Tangenten derselben zugleich Tangenten des in T_1 und T_2 berührenden Kreises; und deshalb müssen die Tangentenabschnitte vom Schnittpunkt bis zum Berührungspunkte gleichgross sein. Dasselbe gilt von den Tangenten in V_1V_2 ebenfalls für den Aehnlichkeitspunkt S_a und ebenso für T_1V_2 und V_1T_2 für S_i wegen der Be-

Figur 129.

Und dasselbe gilt für die Punkte, in welchen die Kreise zum zweitenmal geschnitten werden von den innern Aehnlichkeitsstrahlen $T_1 V_2$ und $T_2 V_1$. Erstere liefern einen Kreis, der M_1 aus- und M_2 einschliesst, letztere einen Kreis, der M_2 aus- und M_1 einschliesst. Und die Tangenten dieser Kreise in den genannten Punktepaaren sind jedenfalls gleichlang und schneiden einander auf der Potenzlinie.

rührungskreise in diesen Punkten. Die Schnittpunkte solcher Tangenten müssen auf der Potenzlinie liegen, weil diese der Ort für alle Punkte gleicher Potenz, also gleichlanger Tangenten ist.

Aufgabe 132. In welcher Beziehung stehen die Aehnlichkeitspunkte zu den zugehörigen Berührungskreisen?

Erkl. 479. Dass der Punkt S_a ausserhalb aller gleichartig berührenden Kreise liegt, S_i innerhalb aller ungleichartig berührenden Kreise, erkennt man anschaulich leicht aus der Auffassung der Tangenten als Grenzfall dieser Berührungskreise. Diese allein gehen durch die Punkte S, alle andern Berührungskreise biegen nach den beiden Seiten aus. Demnach müssen von S_a aus an alle gleichartig berührenden Kreise

Auflösung. Da in Figur 129 für den Kreis X_{ee} das Produkt $S_a T_1 \cdot S_a T_2$ und für den Kreis X_{aa} das Produkt $S_a V_1 \cdot S_a V_2$ die Potenz des Punktes S_a darstellen, und diese Produkte als Wert der „gemeinschaftlichen Potenz“ der Kreise $M_1 M_2$ den gleichen Wert haben, so hat Punkt S_a für alle Kreise wie X_{aa} oder X_{ee} dieselbe Potenz. Folglich ist S_a für alle gleichartig berührenden Kreise der Potenzpunkt.

Ebenso ist für den Kreis X_{ea} das Produkt

gleichlange Tangentenabschnitte gehen, deren Länge gleich:

$$\sqrt{S_a T_1 \cdot S_a T_2} = \sqrt{S_a V_1 \cdot S_a V_2} \text{ u. s. w.}$$

ist —, und ebenso müssen durch S_i in allen ungleichartig berührenden Kreisen gleichlange senkrechte Halbsehnen gehen, deren Länge wieder gleich:

$$\sqrt{S_i T_1 \cdot S_i V_2} = \sqrt{S_i T_2 \cdot S_i V_1}$$

ist. Zieht man um S_a bezw. S_i Kreise mit diesen Längen als Radien, so sind dies nach der Bezeichnung des Satzes 15 gemeinsame Orthogonalkreise aller Berührungskreise. Man nennt sie auch „Potenzkreise" der ursprünglichen Kreise $M_1 M_2$. Der äussere mit Mittelpunkt S_a trifft alle gleichartigen Berührungskreise unter rechtem Winkel, der innere mit Mittelpunkt S_i wird von allen ungleichartigen Berührungskreisen unter einem Halbkreis (Durchmesser) geschnitten.

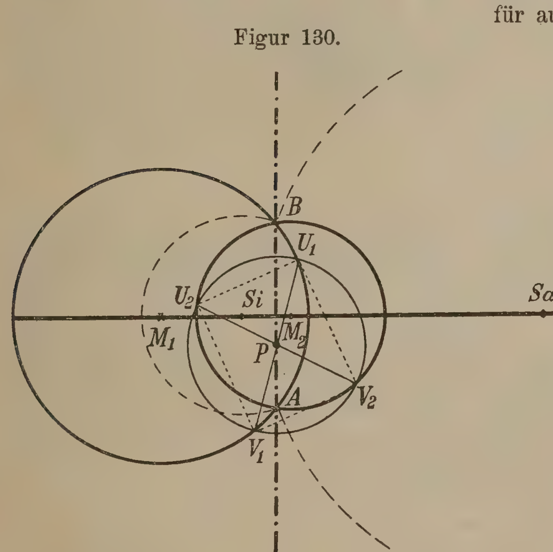
$S_i T_1 \cdot S_i V_2$ und für den Kreis X_{ae} das Produkt $S_i T_2 \cdot S_i V_1$ die Potenz des Punktes S_i, beide Produkte sind aber gleich, und folglich ist S_i Potenzpunkt für alle die Kreise $M_1 M_2$ ungleichartig berührenden Kreise.

Man erhält also die Aussage:

Satz. Für alle Kreise, welche zwei gegebene Kreise gleichartig oder ungleichartig berühren, ist der äussere oder innere Aehnlichkeitspunkt dieser zwei Kreise der Potenzpunkt: er ist Ausgangspunkt gleichlanger Tangenten bezw. gleichlanger senkrechten Halbsehnen an alle Berührungskreise.

Aufgabe 133. Man soll dieselbe Ueberlegung für schneidende Kreise anstellen.

Figur 130.



Erkl. 480. Bei schneidenden Kreisen liegt sowohl S_a als S_i ausserhalb sämtlicher zugehörigen Berührungskreise; es gehen also von S_a an alle gleichartigen, von S_i an alle ungleichartigen Berührungskreise gleichlange Tangentenabschnitte, deren Länge $S_a A$ bezw. $S_i A$ ist. Zeichnet man also mit diesen Längen als Radien Kreise um S_a bezw. S_i, so treffen diese Kreise sämtliche Berührungskreise unter rechtem Winkel: sie heissen „Potenzkreise" der Kreise $M_1 M_2$. Bei schneidenden Kreisen gehen also beide Potenzkreise durch die Schnittpunkte beider Kreise und sind Orthogonalkreise aller Berührungskreise.

Auflösung. Ebenso wie in Figur 129 für auseinanderliegende Kreise, so ist auch in Figur 130 für schneidende Kreise die Potenz des äusseren Aehnlichkeitspunktes in Bezug auf alle gleichartigen, jene des inneren Aehnlichkeitspunktes in Bezug auf alle ungleichartig berührenden Kreise gleichgross. Denn jeder Aehnlichkeitsstrahl trifft in inversen Punkten, also in Berührungspunkten eines Berührungskreises. Diese gemeinsame Potenz ist also für jeden Aehnlichkeitspunkt gleich dem Quadrat seines Abstandes vom Schnittpunkt A oder B der Kreise. Dabei liegen von den gleichartig berührenden Kreisen alle einschliessenden im Aussenraum ausserhalb A oder B, alle eingeschlossenen im Spitzbogen $A U_1 B U_2 A$: unter diesen Kreisen die Punkte A und B als Kreise mit unendlich kleinem Radius, also entsteht:

$$\overline{S_a A}^2 = \overline{S_a B}^2$$

als gemeinsame Potenz. Von den ungleichartig berührenden Kreisen liegen alle den Kreis M_1 ausschliessenden und von M_2 eingeschlossenen im sichelförmigen Spitzbogen $A V_2 B U_1 A$; alle den Kreis M_2 ausschliessenden und von M_1 ausgeschlossenen im Spitzbogen $A V_1 B U_2 A$; unter diesen Kreisen wieder die Punkte A und B als Kreise mit unendlich kleinem Radius, also entsteht wieder:

$$\overline{S_i A}^2 = \overline{S_i B}^2$$

als gemeinsame Potenz.

Erkl. 481. In Figur 130 sind die beiden Potenzkreise teilweise angedeutet. Denkt man sich den Aehnlichkeitsstrahl SA oder SB gezogen und mit PQ die weiteren Schnittpunkte bezeichnet, so folgt sowohl für S_a als für S_i:

$$SP_1 : SB = SB : SQ_2, \qquad \overline{SB}^2 = SP_1 \cdot SQ_2.$$

Dies folgt auch daraus, dass die Punkte A und B selbst zu den Berührungskreisen gehören, also SA und SB selbst für Tangentenstrecken anzusehen sind. — Zieht man $M_1 B = r_1$ und $M_2 B = r_2$, so ist die Grundseite $M_1 M_2$ des Dreiecks $M_1 M_2 B$ durch S_i und S_a geteilt im Verhältnis $r_1 : r_2$, folglich müssen $S_i B$ und $S_a B$ die Halbierungslinien des Winkels und Aussenwinkels an der Spitze sein. Die Senkrechten auf den Radien $M_1 B$, $M_2 B$, $S_i B$, $S_a B$ bilden aber die Tangentenwinkel der Kreise um M und S, also müssen auch die Tangenten der Potenzkreise den Winkel der schneidenden Kreise $M_1 M_2$ halbieren und aufeinander senkrecht stehen.

Aufgabe 134. Man soll dieselbe Ueberlegung für ineinanderligende Kreise anstellen.

Auflösung. Bei ineinanderliegenden Kreisen (Figur 123 und 124) hat S_a gleiche Potenz:

$$SP_1 \cdot SQ_2 = SP_2 \cdot SQ_1$$

für alle gleichartigen, S_i für alle ungleichartigen Berührungskreise. Da aber S_a in allen erstgenannten innerhalb, S_i aus allen letztgenannten ausserhalb liegt, so gehen durch S_a gleichlange senkrechte Halbsehnen aller gleichartigen, durch S_i gleichlange Tangentenabschnitte an alle ungleichartigen Berührungskreise.

Erkl. 482. Der „äussere Potenzkreis“ der Kreise $M_1 M_2$ in Figur 123 wird von allen gleichartigen Berührungskreisen unterm Halbkreis geschnitten; der „innere Potenzkreis“ in Figur 124 trifft alle ungleichartigen Berührungskreise rechtwinklig. Figur 124 gibt besonders Veranlassung zu einer auch sonst stattfindenden Merkwürdigkeit der Figur. Denkt man sich nämlich an die Berührungskreise X_{ea} oder Y_{ea} ebensolche auf beiden Seiten berührend angeschlossen, so müssen wegen der gleichen Potenz die gemeinsamen Tangenten alle durch S_i gehen und gleichlang sein, also müssen alle Berührungspunkte auf dem „Potenzkreise“ liegen.

Aufgabe 135. Man soll zu zwei beliebig gegebenen ganz aus- oder ineinanderliegenden Kreisen möglichst viele Kreise der beiden durch sie bestimmten Kreisbüschel konstruieren.

Auflösung. Man konstruiere einen beliebigen Orthogonalkreis P der beiden gegebenen Kreise $M_1 M_2$. Dann ist jeder Orthogonalkreis dieses Kreises P_1, dessen Mittelpunkt auf der Centralen $M_1 M_2$ liegt, einer von demjenigen Büschel, welchem die beiden gegebenen Kreise $M_1 M_2$ selbst angehören. Und jeder Kreis, welcher durch die Schnittpunkte des Kreises P mit der Centralgeraden $M_1 M_2$ geht, ist ein Kreis des zugeordneten Büschels.

Erkl. 483. Orthogonalkreise zu einem gegebenen Kreise entstehen sehr einfach, indem man irgend eine Tangentenstrecke desselben zum Radius macht. Den Mittelpunkt eines Orthogonalkreises für zwei Kreise findet man am einfachsten durch die Sehnen eines beliebigen dritten Kreises, welcher die beiden gegebenen schneidet.

Aufgabe 136. Dieselbe Aufgabe für schneidende oder berührende Kreise zu lösen.

Auflösung. Für schneidende oder berührende Kreise ist jeder durch dieselben festen Punkte gehende, oder jeder im gleichen Punkte berührende Kreis einer von dem Büschel, welchem die gegebenen Kreise angehören. Kreise des zugehörigen Büschels sind im ersten Falle alle Orthogonalkreise eines der gegebenen, welche ihren Mittelpunkt auf der gemeinsamen Sehne haben; im zweiten Falle alle Kreise durch den Berührungspunkt, welche den Mittelpunkt auf der gemeinsamen Tangente haben.

Erkl. 484. Von den in den bisherigen Aufgaben betrachteten Kreisen sind demselben Büschel angehörige Kreise jeweils die beiden gegebenen Kreise $M_1 M_2$ mit dem Ortskreis, der als Halbkreis über den Aehnlichkeitspunkten entsteht; ferner der eine der beiden „Potenzkreise“, nämlich bei auseinanderliegenden Kreisen der äussere, bei ineinanderliegenden der innere, ferner bei schneidenden Kreisen beide Potenzkreise; sowie später der Transformationskreis zweier durch Inversion zusammengehörigen Kreise.

---

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 137. Man soll Aufgabe 127 bestätigen für die Strecken CA_2 und CB_2.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 127.

Aufgabe 138. Man bestimme die Potenzlinie gleicher oder koncentrischer Kreise.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 128.

Aufgabe 139. Man bestimme das Minimum der Abstände zwischen Potenzlinie und dem Punkte M_1.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 128.

Aufgabe 140. Welcher geometrische Ortssatz ergibt sich aus Aufgabe 129?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 129.

Aufgabe 141. Welche besondere Eigenschaft hat die Potenzlinie für einen Punkt und einen Kreis?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 130.

Aufgabe 142. Man bestimme die Beziehung zwischen Aehnlichkeitsstrahlen und Potenzlinien berührender Kreispaare.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 131.

Aufgabe 143. Man konstruiere die Potenzkreise zweier gegebenen Kreise.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 132.

Aufgabe 144. Was wird aus den Potenzkreisen bei gleichgrossen schneidenden Kreisen?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 133.

Aufgabe 145. Dieselbe Aufgabe für berührende Kreise zu lösen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 134.

Aufgabe 146. Welche Büschel werden durch koncentrische Kreise bestimmt?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 135.

Aufgabe 147. Welche Büschel werden durch zwei gleichgrosse Kreise bestimmt?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 136.



6) Aufgaben über Pol und Polare, reciproke Radien, und die Sätze von Paskal und Brianchon.

(Zu Abschnitt 6a, b, c.)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 148. Man soll an einen gezeichnet vorliegenden Kreis die Tangenten von einem gegebenen Punkte mit dem Lineal allein konstruieren.

Figur 131.

Erkl. 485. Als Figur für die erste Lösung nebenstehender Aufgabe sehe man Figur 73: Von Q die Sekanten AD und BC liefern q als Polare von Q, also deren Schnittpunkte als Berührungspunkte.

Auflösung. 1) Man zieht von dem gegebenen Punkte aus ein Sekantenpaar durch den Kreis, zeichnet die vier Verbindungsgeraden des entstehenden Vierecks und verbindet deren Schnittpunkte. Dann trifft diese Verbindungsgerade den Kreis in den Berührungspunkten der gesuchten Tangenten.

2) Man zieht drei Sekanten durch den Kreis, verbindet kreuzweise deren Schnittpunkte auf dem Kreis und verbindet die Schnittpunkte dieser neuen Sehnen. Diese Verbindungsgerade trifft den Kreis in den Berührungspunkten der gesuchten Tangenten (s. Figur 131).

Aufgabe 149. Man soll die Konstruktionsweisen zusammenstellen, wie zu einem gegebenen Punkte die Polare konstruiert werden kann.

Erkl. 486. Von den nebenstehenden Konstruktionen geht die erste auf Antwort der Frage 83, die zweite auf Antwort der Frage 85 zurück, die dritte und vierte auf Satz 18 in Verbindung mit dem vorigen, die fünfte und sechste auf Satz 20, die siebente und achte auf Satz 17.

Erkl. 487. Ganz entsprechend den nebenstehenden Fällen für die Polare erhält man auch verschiedene Konstruktionsweisen für den Pol P einer gegebenen Geraden p.

Auflösung. I. Ist der Punkt F ein äusserer Punkt, so kann man folgendermassen verfahren:

1) Man zieht den Durchmesser des Punktes, konstruiert den vierten harmonischen Punkt Q und errichtet die Senkrechte.

2) Man zieht den Durchmesser des Punktes, misst MP, bildet:

$$\frac{r^2}{MP} = MQ,$$

trägt MQ auf dem Durchmessser ab und errichtet in Q die Senkrechte.

3) Man zieht zwei Sekanten durch P, konstruiert auf jeder den vierten harmonischen Punkt und verbindet diese beiden.

I. Trifft die Gerade den Kreis nicht, so kann man verfahren wie folgt:

1) Man zieht den senkrechten Durchmesser und konstruiert den vierten harmonischen Punkt.

2) Man zieht den senkrechten Durchmesser MQ, misst MQ, bildet:

$$\frac{r^2}{MQ} = MP$$

und trägt MP auf dem Durchmesser ab.

3) Man zieht den senkrechten Durchmesser MQ und eine Sekante durch Q, konstruiert auf dieser den vierten harmonischen Punkt und fällt die Senkrechte von da auf den Durchmesser.

4) Man konstruiert für zwei Punkte der Geraden p die Polaren und erhält den Pol P als Schnittpunkt beider Geraden.

5) Man zieht den senkrechten Durchmesser MQ und eine oder beide Tangenten von Q aus: Die Berührungssehne trifft den Pol.

II. Schneidet die Gerade den Kreis, so bleiben die ersten vier Konstruktionen in unveränderter Giltigkeit, und dazu kommt:

5) Man errichtet die Tangenten in den Kreisschnittpunkten: deren Schnittpunkt miteinander, oder von einer mit dem senkrechten Durchmesser ist Pol P.

4) Man zieht den Durchmesser und eine Sekante, konstruiert auf dieser den vierten harmonischen Punkt und fällt von da die Senkrechte auf den Durchmesser.

5) Man zieht zwei Sekanten und konstruiert die Nebenseite des entstehenden vollständigen Vierseits.

6) Man zieht drei Sekanten, verbindet kreuzweise deren Schnittpunkte und verbindet die Schnittpunkte dieser Geradenpaare.

7) Man zieht die Tangenten des Punktes und verbindet die Berührungspunkte.

8) Man zieht eine Tangente und eine Sekante oder eine Tangente und den Durchmesser, und verfährt wie bei 3 und 4.

II. Ist der Punkt ein innerer Punkt, so bleiben die vorigen Konstruktionen 1—6 unverändert giltig, und dazu kommt:

7) Man errichtet in P die Senkrechte auf den Durchmesser und bringt die Tangenten in deren Schnittpunkten miteinander oder eine derselben mit dem Durchmesser zum Schnitt.

Aufgabe 150. Was folgt aus den Sätzen 20 für zwei Sehnenvierecke mit gemeinsamem Diagonalenschnittpunkt?

Erkl. 488. Dualistisch übertragen heisst nebenstehender Satz folgendermassen:

Satz. Liegen zwei Nebenecken zweier Tangentenvierecke auf derselben Geraden, so gehen die fünfte und sechste Seite dieser Vierecke durch denselben Punkt.

Von jedem der beiden Sätze lässt sich auch die Umkehrung aufstellen, dass wenn bei zwei Sehnenvierseiten zwei Ecken auf derselben Geraden liegen, dann die Nebenseiten durch denselben Punkt gehen; und wenn bei zwei Tangentenvierecken zwei Seiten durch denselben Punkt gehen, dann die Nebenecken auf derselben Geraden liegen.

Auflösung. Wenn zwei Sehnenvierecke den gleichen Diagonalenschnittpunkt haben, so muss auch die Polare dieses Punktes sowohl vom einen, als auch vom andern Vierseit Nebenseite sein, also müssen die fünfte und sechste Ecke jedes dieser vollständigen Vierseite auf derselben Geraden liegen. Man erhält die Aussage:

Satz. Gehen zwei Nebenseiten zweier Sehnenvierseite durch denselben Punkt, so liegen die fünfte und sechste Ecke dieser Vierseite auf einer Geraden.

Aufgabe 151. Man soll nachsuchen, welches früher behandelte Kapitel mit der Theorie der reciproken Radien übereinstimmend ist.

Erkl. 489. Sätze 8 und 10 des VI. Teiles dieses Lehrbuches lauten:

Wenn die Schenkel eines Winkels von zwei antiparallelen Geraden geschnitten werden, so ist das Produkt der zwei vom Scheitel aus gemessenen Abschnitte auf dem einen Schenkel gleich dem Produkt der vom Scheitel aus gemessenen Abschnitte auf dem andern Schenkel. — Und:

Auflösung. Mit der Inversionstheorie übereinstimmend ist die Lehre von den antiparallelen Geraden im Abschnitt 5 des VI. Teiles dieses Lehrbuches. Denn bei den antiparallelen Geraden A_1A_2 und B_1B_2 der Figur 27 des VI. Teiles dieses Lehrbuches ist:

$$SA_1 : SA_2 = SB_2 : SB_1,$$

und in Figur 28 daselbst ist:

$$\overline{SA_2}^2 = SA_1 \cdot SB_1.$$

Wird ein Schenkel eines Winkels von zwei antiparallelen Geraden in demselben Punkte geschnitten, so ist das Quadrat dieses gemeinsamen Abschnitts gleich dem Produkt der beiden vom Scheitel aus gemessenen Abschnitte auf dem andern Schenkel.

Zieht man also in Figur 27 oder 28 einen Kreis mit Radius:

$$\sqrt{SA_1 \cdot SB_1},$$

so ist derselbe Grundkreis, $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ sind entsprechende inverse oder reciproke Punkte, in Figur 28 liegt A_2 selbst auf dem Grundkreis, so dass $SA_2 = SB_2$ der Radius des Grundkreises ist.

Aufgabe 152. Man soll nachweisen, dass die Mittelpunkte zweier inversen Kreise nicht selbst reciproke Punkte sind.

Erkl. 490. Wenn überhaupt bei zwei inversen Kreisen die Mittelpunkte einander invers wären, so müsste dies auch bei einem selbstentsprechenden der Fall sein, es müsste also dessen Mittelpunkt auf dem Grundkreise liegen. Nun ist es aber gar nicht möglich, dass ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf dem Grundkreis liegt, diesen orthogonal trifft. Denn der Schnittwinkel als Winkel der Tangenten ist gleich dem Winkel der dazu senkrechten Radien. Diese aber bilden nur immer einen Peripheriewinkel, dessen Schenkel durch den Anfangs- und Endpunkt eines Radius gehen, dessen Bogen also zwischen 0 und 180° liegt. Nur der Endpunkt des Radius selbst als Kreis mit unendlich kleinem Radius könnte als Orthogonalkreis betrachtet werden.

Auflösung. Der verlangte Nachweis ist sehr leicht zu liefern durch Betrachtung eines selbstentsprechenden Kreises, also eines Orthogonalkreises zu dem Grundkreise. Damit dieser den Grundkreis rechtwinklig schneiden kann, muss sein Mittelpunkt auf einer Tangente, also ausserhalb des Grundkreises liegen. Diesem Mittelpunkt entspricht also ein Punkt innerhalb des Grundkreises, der nicht ebenfalls Mittelpunkt der Orthogonalkreises sein kann, und doch entspricht der Orthogonalkreis sich selbst; wenn also die Mittelpunkte reciprok sein sollten, so müsste der Mittelpunkt des Orthogonalkreises auf der Peripherie des Grundkreises liegen, was unmöglich ist.

Aufgabe 153. Man wende auf die Figuren 58 und 129 Inversion an und untersuche das Ergebnis.

Erkl. 491. Es ist nicht ohne Interesse, die Inversion der drei Geraden des Dreiecks $M_1 M_2 M_3$ in Figur 58 einzeln zu betrachten: Je zwei der daraus hervorgehenden Kreise treffen einander in dem dem Schnittpunkt M entsprechenden Punkte. Diese neuen Schnittpunkte der Kreise liegen also — weil $M_1 M_2 M_3$ ausserhalb, nun innerhalb des Grundkreises, — und weil $M_1 M_2 M_3$ je innerhalb der gleichnamigen Kreise, nun ebenfalls innerhalb der im Grundkreis liegenden Flächen dieser Kreise. Die Scheitelwinkelräume des Dreiecks als ganze entsprechen ziemlich kleinen Spitzbogenräumen im Innern des Grundkreises, die Kreissegmente zwischen den Geraden und dem Grundkreise entsprechen den Spitzbogen zwischen Grundkreis und äusserem Bogenstück der Kreise u. s. w.

Auflösung. 1) Wenn Figur 58 transformiert wird mit P als Mittelpunkt und dem Potenzkreis als Grundkreis der Transformation, so bleibt fast die ganze Figur unverändert: Der Potenzkreis bleibt als Grundkreis identisch, die Kreise $M_1 M_2 M_3$ bleiben als Orthogonalkreise ebenfalls identisch; deren Tangenten und überhaupt alle durch P gehenden Geraden bleiben unverändert; das einzige Veränderliche sind die drei Geraden des Dreiecks $M_1 M_2 M_3$. Diese werden zu Kreisen, von denen man sofort drei Punkte angeben kann: nämlich Punkt P und je die beiden Schnittpunkte, in welchen die Geraden den Grundkreis selbst treffen.

2) Wenn Figur 129 transformiert wird mit S_a als Mittelpunkt und dem zugehörigen äusseren Potenzkreis mit Radius

$$\sqrt{S_a T_1 \cdot S_a T_2}$$

als Grundkreis der Inversion, so wird Kreis M_1 zu M_2, nämlich T_1 zu T_2, V_1 zu V_2, A_1 zu B_2, B_1 zu A_2 u. s. w. Der Potenzkreis um P bleibt selbstentsprechend; Berührungskreise in $T_1 T_2$ oder $V_1 V_2$ müssen

Erkl. 492. Die nebenstehende Betrachtung lehrt verschiedene wichtige Seiten der Inversionstheorie erkennen und in ihrem Werte schätzen: Einmal erkennt man Eigenschaften der Figuren, die sonst schwerer zu finden wären. Dahin gehört die Thatsache von den z. B. in Figur 129 mehrfach bestehenden engen Beziehungen zwischen Geraden und Kreisen unter sich oder gegeneinander. Zweitens lehrt die Inversion Beziehungen kennen unter Kreisen, die zuvor nur von Geraden bekannt waren: denn alle Eigenschaften, infolge deren mehrere Punkte auf einer Geraden liegen oder mehrere Geraden durch einen Punkt gehen, verwandeln sich durch Inversion der Figuren in die Eigenschaft, dass mehrere Punkte auf einem Kreise liegen oder mehrere Kreise durch einen Punkt gehen. Drittens ermöglicht die Inversion rückwärts manche Vereinfachungen von Konstruktionsaufgaben. Denn sowie in einer Aufgabe z. B. nur Kreise vorkommen, kann durch Inversion mindestens einer dieser Kreise in eine Gerade verwandelt werden. Sind unter den Kreisen zwei oder mehrere, welche durch denselben Punkt gehen, so können durch Wahl dieses Punktes als Transformationsmittelpunkt alle diese Kreise in Gerade verwandelt werden.

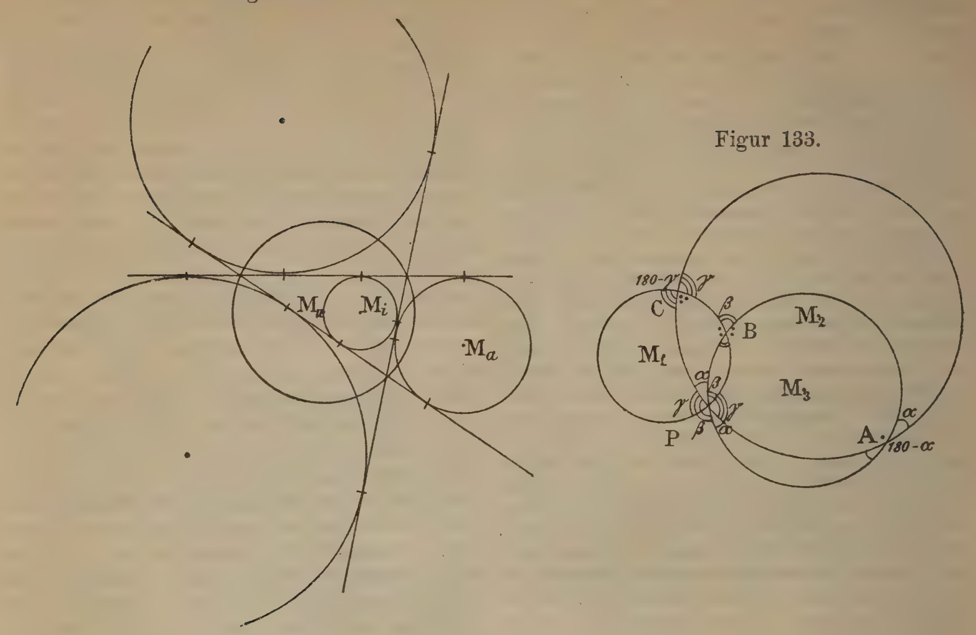
Man vergleiche hierüber noch die nächsten Aufgaben.

also wieder Berührungskreise in $T_2 T_1$ oder $V_1 V_2$ werden, d. h. die Kreise X_{aa} und X_{ee} sind selbstentsprechend, sie sind Orthogonalkreise des Grundkreises. Berührungskreise in $T_1 V_2$ oder $T_2 V_1$ werden zu Berührungskreisen in $T_2 V_1$ und $T_1 V_2$, d. h. die Kreise X_{ea} und X_{ae} sind einander invers, folglich müssen ihre Schnittpunkte auf dem Grundkreis liegen. Die Geraden durch S_a bleiben identisch: jene durch S_i werden zu Kreisen durch S_a und den reciproken Punkt zu S_i, z. B. $S_i T_1 V_2$ und $S_i T_2 V_1$ zu den Kreisen $T_2 V_1 S_a$ und $T_1 V_2 S_a$; $S_i P$ wird zum Kreise durch S_a und die Schnittpunkte der Kreise auf dem Grundkreise. Die Geraden durch P werden zu Kreisen durch S_a und durch den entsprechenden Punkt zu P, z. B. PT_1 zum Berührungskreis durch S_a an M_2 in T_2, umgekehrt z. B. PV_2 zum Berührungskreis durch S_a an M_1 in V_1: letzterer geht durch denselben Punkt des Grundkreises, wie PV_2. Die vorhandenen Radien der Kreise $M_1 M_2$ werden zu Kreisen durch S_a (also nicht durch $M_2 M_1$) und die entsprechenden Peripheriepunkte; und zwar müssen sie in letzteren ebenfalls senkrecht einschneiden, also wird z. B. $M_1 T_1$ zum Orthogonalkreis von M_2 in T_2, der durch S_a geht, $M_2 V_2$ zum Orthogonalkreis von M_1 in V_1, der durch S_a geht u. s. w.

Aufgabe 154. Man soll die Aufgabe der Um-, In- und Ankreise des Dreiecks durch reciproke Radien übertragen.

Auflösung. Wenn das Dreieck ABC in Figur 132 samt seinen fünf Kreisen durch reciproke Radien übertragen wird mit beliebigem Transformationsmittelpunkt P und Grundkreis um P, so werden jedenfalls die drei Geraden a, b, c zu Kreisen durch den Mittelpunkt P, der Umkreis M_u zu einem Kreis durch die drei Kreisschnittpunkte A, B, C, welche den drei gleichnamigen Dreieckspunkten reciprok sind, und die Berührungskreise $M_i M_a M_b M_c$ werden zu Berührungskreisen jener Kreise. Man erhält also aus dem Dreieck Figur 132 eine Figur wie Figur 133, nämlich die drei Kreise mit Mittelpunkten $M_1 M_2 M_3$: dieselben gehen je durch P und durch die den Dreieckspunkten entsprechenden Punkte ABC. Die Schnittwinkel dieser drei Kreise sind genau von gleicher Grösse α, β, γ, wie die drei Schnittwinkel des Dreiecks. Dem Innenraum des Dreiecks entspricht der Innenraum des einzigen an P nicht angrenzenden Bogendreiecks ABC, dem Inkreis des Dreiecks M_i also der Inkreis, welcher diese drei Bogenstücke berührt. Den Scheitelwinkel-

Erkl. 493. Je nach Lage des Transformationsmittelpunktes P und Grösse des Grundkreises erhält man verschiedene Erscheinungen der Figur 133. Liegt der Grundkreis ganz innerhalb oder ganz ausserhalb des Dreiecks ABC, so liegen jedesmal die drei Kreise $M_1 M_2 M_3$ ganz im Innern des Grundkreises, weil die drei Geraden ganz ausserhalb verlaufen; schneidet der Grundkreis die Dreiecksseiten a, b, c, so thun dasselbe die Kreise $M_1 M_2 M_3$, und zwar in denselben Schnittpunkten. Um die Lage des Innen- oder der Aussenräume des Dreiecks zu unterscheiden, hat man zu beachten, dass der vom Punkte P abgewandten Seite einer Geraden das Innere, der zugewandten Seite das Aeussere des zugeordneten Kreises entspricht. Da also in Figur 133 das Bogendreieck ABC ausserhalb M_1 und M_3, aber innerhalb M_2 liegt, so muss der Punkt P ausserhalb der Dreiecksseite b, aber innerhalb a und c liegen, also im Aussenwinkelraum an b. Würde nun P so liegen, dass in Figur 132 der Ankreis M_b die übrigen noch neben sich hätte, so müsste



dasselbe in Figur 133 eintreten. Da aber hier der Berührungskreis des Bogendreiecks PAC die übrigen einschliesst, so ist P in Figur 132 so zu denken, dass der ganze Grundkreis innerhalb des Ankreises M_b zu liegen kommt. Dann schliesst in Figur 132 der Kreis M_b alle übrigen Figurenteile vom Grundkreise aus, folglich muss in Figur 133 der entsprechende Kreis alle übrigen Figurenteile einschliessen: Dem gesamten Innenraum des Kreises M_b in Figur 133 entspricht der gesamte Aussenraum des gemeinsamen Umkreises der drei Kreise $M_1 M_2 M_3$.

Erkl. 494. Würde der Transformationsmittelpunkt P in Figur 132 zwar auch im Aussenraum ausser AC, aber ausserhalb M_b liegen, so käme in Figur 133 Kreis M_2 so zu liegen, dass die äussere Tangente von $M_1 M_3$ ausserhalb M_2 verläuft: dann würde nicht das Innere des Kreises M_b, sondern sein Aussenraum jenseits AC dem Aussenraum der Figur 133 entsprechen. — Würde P im Scheitelraum des Winkels β in Figur 132 liegen, so läge das Dreieck ausserhalb a und c, innerhalb b, folglich müsste in Figur 133 Kreis M_2 so klein werden, dass C und A auf dem Bogenstücke innerhalb BP zu liegen käme, und das Bogendreieck ABC läge innerhalb der Kreise $M_1 M_3$, ausserhalb M_2. — Wenn die Punkte ABC, wie in Figur 133 nahezu der Fall ist, auf einer Geraden liegen, so rührt das daher, dass der Punkt P nahezu auf einem Punkte des Umkreises M_u gelegen ist.

räumen des Dreiecks, welche von der Ecke des Dreiecks ins Unendliche sich erstrecken, entsprechen die an P angrenzenden Bogenzweiecke AP, BP, CP. Den Aussenwinkelräumen des Dreiecks, welche von den Seiten des Dreiecks sich ins Unendliche erstrecken, entsprechen diejenigen Bogendreiecke, welche von den Bogen AB, BC, CA und P als dritte Ecke begrenzt sind. Folglich entspricht dem Ankreis M_a des Dreiecks der dem Bogendreieck BCP eingeschriebene, ebenso dem Ankreis M_c der Inkreis des Bogendreiecks ABP, dem Ankreis M_b der Berührungskreis des Bogendreiecks ACP (welcher in Figur 133 der Umkreis der gesamten drei Kreise ist, vergleiche Erkl. 493).

Die Mittelpunkte der Berührungskreise eines Dreiecks entstehen als gemeinsame Schnittpunkte je dreier von den sechs Geraden, welche die Winkel und Aussenwinkel des Dreiecks halbieren: folglich gehen auch diejenigen sechs Kreise, welche durch P gehen und die Winkel und Nebenwinkel der Kreise bei A, B, C halbieren, zu je dreien durch einen Punkt, nämlich durch die den Mittelpunkten $M_i M_a M_b M_c$ entsprechenden Punkte, nicht aber auch durch die Mittelpunkte der neuen Berührungskreise der Bogendreiecke. Wohl aber müssen die Berührungspunkte der Kreise mit den Seiten des

Bogendreiecks die entsprechenden Punkte sein zu den Berührungspunkten auf den Dreiecksseiten (vergleiche Erkl. 496). Und wie an Figur 31 des vorigen VII. Teiles dieses Lehrbuches nachgewiesen wurde, dass gewisse Verbindungsgeraden dieser Berührungspunkte durch einen Punkt gehen, so müssen nunmehr die Kreise durch P und die entsprechenden Berührungspunkte je durch den reciproken Schnittpunkt hindurchgehen (vergl. Erkl. 495).

Erkl. 495. Wie die vorliegende Ueberlegung zeigt, lassen sich eine Reihe von Eigenschaften des geradlinigen Dreiecks als Eigenschaften der Bogendreiecke von drei durch denselben Punkt gehenden Kreisen übertragen. In Antwort der Frage 68 des VII. Teiles dieses Lehrbuches war gezeigt worden, dass für die Berührungspunkte der vier In- und Ankreise des Dreiecks zwölf Ecktransversalen zu je dreien durch einen von acht Punkten gehen: Nun werden für die vier Berührungskreise der Kreisbogendreiecke in Figur 133 jene Verbindungsgeraden zu Kreisen durch P und die entsprechenden Berührungspunkte. Folglich gibt es an Figur 133 zwölf Kreise durch P und die Eckpunkte A, B, C, welche zu je dreien durch einen von acht Punkten gehen; es liegen nämlich (wenn mit $D_{0123}\, E_{0123}\, F_{0123}$ die Berührungspunkte der Kreise M_{iabc} mit den Kreisen $M_1\, M_2\, M_3$ bezeichnet werden) die Punkte:

1) PAD_0, PBE_0, PCF_0 je auf einem Kreise durch einen Punkt P_0
2) PAD_0, PBE_3, PCF_2 „ „ „ „ „ „ „ P_1
3) PAD_3, PBE_0, PCF_1 „ „ „ „ „ „ „ P_2
4) PAD_2, PBE_1, PCF_0 „ „ „ „ „ „ „ P_3
5) PAD_1, PBE_1, PCF_1 „ „ „ „ „ „ „ Q_1
6) PAD_2, PBE_2, PCF_2 „ „ „ „ „ „ „ Q_2
7) PAD_3, PBE_3, PCF_3 „ „ „ „ „ „ „ Q_3
8) PAD_1, PBE_2, PCF_3 „ „ „ „ „ „ „ Q_0.

Hiezu kommen die gemeinsamen Schnittpunkte der Kreise, welche die Innen- und Aussenwinkel halbieren, der Schnittpunkt der Kreise, welche durch je eine Ecke gehen und den gegenüberliegenden Bogen senkrecht treffen (Höhenpunkt), die durch den Schwerpunkt gehenden u. s. w., wobei allerdings diese Punkte — teils die reciproken Punkte zu den entsprechenden des geradlinigen Dreiecks sind, ohne für das Kreisbogendreieck dieselben Eigenschaften zu haben, — teils besondere analoge Eigenschaften beim Bogendreieck besitzen, ohne dass die reciproken Geraden die gleiche Eigenschaft für das geradlinige Dreieck hatten.

Erkl. 496. Aus vorstehender Aufgabe entnimmt man sehr leicht die Uebertragung für eine bestimmte Kreisaufgabe durch Inversion. Ist nämlich die Apollonische Berührungsaufgabe für den Fall zu lösen, dass an drei durch denselben Punkt gehende Kreise die möglichen Berührungskreise konstruiert werden sollen, so transformiert man die drei Kreise von P aus in gerade Linien, konstruiert die vier Berührungskreise des Dreiecks und transformiert dann diese wieder rückwärts. Dabei wird man allerdings je die Mittelpunkte, der neuen Kreise nicht übertragen können von den Dreieckskreisen, wohl aber die Berührungspunkte; diese müssen reciproke Punkte sein, also auf dem gleichen Radius von P aus liegen; man braucht zur Auffindung der neuen Berührungspunkte gar keine andere Konstruktion, als P mit den vorigen Berührungspunkten zu verbinden, und sobald dann für einen Kreis zwei Berührungspunkte gefunden sind, hat man auch zwei Radien, also den Mittelpunkt. Andererseits schliesst man aus dieser Uebertragung, dass für drei durch denselben Punkt gehende Kreise sich vier Berührungskreise finden lassen, wie fürs Dreieck, während für allgemein drei Kreise acht Berührungkreise bestehen.

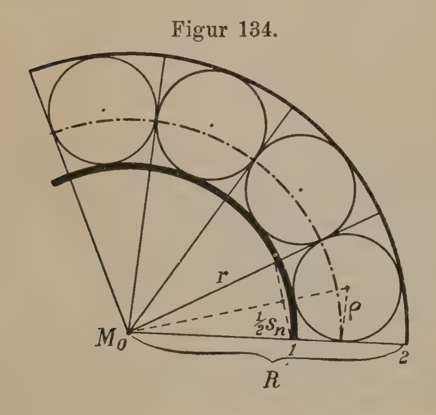
Aufgabe 155. Man soll die Besonderheit der an Figur 82 möglichen Berührungskreise untersuchen.

Erkl. 497. Man erkennt, dass durch die Transformation nach reciproken Radien eine Reihe von Eigenschaften übertragen werden, eine Reihe anderer Eigenschaften aber nicht.

Auflösung. Denkt man sich in Figur 82 den Centriwinkel in n gleiche Teile geteilt, und legt an einen der Kreise um M solche Berührungskreise, welche je zwei Schenkel des Winkels und den gegebenen Kreis berühren (Figur 134), so liegen diese sämtlichen Berührungskreise innerhalb eines kon-

Uebertragen werden alle solche, welche die vereinigte Lage von Punkten und Geraden und Kreisen angeben und blosse Winkeleigenschaften enthalten, — in solche, welche die vereinigte Lage angeben zwischen Punkten, Kreisen durch P, und Kreisen, und die gleichen Winkeleigenschaften enthalten. Zu den nicht übertragbaren gehören aber besonders solche Eigenschaften, die Längenbeziehungen enthalten — auch wenn diese nur in Form von Längenproportionen angegeben sind. (Bei der Aehnlichkeitsbeziehung bleiben die letzteren Eigenschaften erhalten). Eine weitere weittragende Unterscheidung zwischen den reciproken Figuren ist die folgende: Während man sich sonst die Gesamtheit der unendlich fernen Elemente einer Ebene als eine Gerade, oder etwa einen Kreis mit unendlich grossem Radius vorzustellen gewöhnt hatte, — so erscheint bei der reciproken Figur die Abbildung aller unendlich fernen Elemente der Ebene bloss in den Bereich in unmittelbarer Nähe des Transformationsmittelpunktes zusammengeschrumpft, also das unendlich Ferne übertragen als Kreis mit unendlich kleinem Radius.

Figur 134.



Erkl. 498. Die Konstruktion der Berührungskreise in Figur 134 ist eine sehr einfache. Denn wegen der Symmetrie ist der Berührungspunkt mit dem ersten Kreis der Mittelpunkt des Bogens, also gesellt sich die Tangente in diesem Punkte als dritte zu den beiden Winkelschenkeln. Der Kreis, auf welchem die Mittelpunkte liegen, ist in Figur 134 nicht gezeichnet; derselbe transformiert sich wieder als ein Kreis, der aber nicht mehr die Mittelpunkte der transformierten Kreise trifft. Wohl aber trifft jeder Kreis der transformierten Figur alle Berührungskreise unter denselben Winkeln, wie solches an der ursprünglichen stattfand. Dies gilt aber von jedem koncentrischen Kreis der Figur 134 und seinem transformierten in Bezug auf die Berührungskreise beider Figuren. Der geometrische Ort der Mittelpunkte der neuen Berührungskreise ist nach früherem überhaupt kein Kreis, sondern bei auseinanderliegenden Kreisen Hyperbel, bei ineinanderliegenden Ellipse.

centrischen Ringes und lassen sich innerhalb desselben beliebig verschieben. Sowohl ihre Mittelpunkte, als ihre Berührungspunkte bleiben dabei auf einem der koncentrischen Kreise liegend.

Wird nun die Figur aus irgend einem Punkte reciprok transformiert, so entsteht aus dem koncentrischen Kreisbüschel wieder ein Kreisbüschel und zwar jedenfalls von der Art nicht schneidender Kreise, da aus dem den Transformationsmittelpunkt treffenden Radius die Centrale, aus den übrigen Radien das durch jenen und den festen Punkt gehende Kreisbüschel erster Art entsteht. Der Zwischenraum zweier Kreise des Büschels zweiter Art entspricht dem Kreisring zwischen den beiden ursprünglichen koncentrischen Kreisen, der Berührungskreis den Berührungskreisen, die Berührungs*punkte* den Berührungs*punkten*; letztere liegen also auch bei der Transformationsfigur auf einem *Kreise*, dessen Mittelpunkt nach Figur 129 und 124 zugleich Schnittpunkt der gemeinsamen Tangenten, nämlich Aehnlichkeitspunkt der transformierten Büschelkreise ist. Die neuen Kreise sind, wenn der Transformationsmittelpunkt innerhalb des inneren oder ausserhalb des äusseren der koncentrischen Kreise gewählt wird, ineinanderliegende, wenn dagegen der Transformationsmittelpunkt zwischen den Kreisen, also irgendwo auf der Ringfläche liegt, auseinanderliegende Kreise. Aber für beide Fälle gilt wegen der Verschiebbarkeit der Berührungskreise im Ringe der Figur 134 die merkwürdige Beziehung, dass *wo man auch mit einem ersten Berührungskreise beginnt, die Reihe stets eine geschlossene ist*, d. h. dass ein gewisser letzter wieder den ersten berührt, nämlich der $n$te, wenn die Figur 134 eine Teilung des Centriwinkels in n Teile enthalten hatte.

Dieser Umstand ist bei ineinanderliegenden Kreisen für die äussere Anschauung wenigstens leicht vorstellbar; weniger leicht erkennbar ist er für auseinanderliegende Kreise. Denn während bei den ineinanderliegenden Kreisen sämtliche Berührungskreise vom grösseren eingeschlossen, vom kleineren ausgeschlossen werden, so kann bei auseinanderliegenden Kreisen die Reihe nur fortgesetzt werden, indem man von der die beiden gegebenen Kreise ausschliessenden Berührungsart überspringt zu der die beiden einschliessenden Berührungsart. Und trotzdem muss die Reihe eine geschlossene sein, d. h. der $n$te Berührungskreis wieder den ersten berühren, wo man auch den ersten willkürlich zeichnet.

Erkl. 499. Wird die Figur 134 als solche reciprok transformiert mit Mittelpunkt M und dem Kreis durch die Berührungspunkte als Grundkreis, so bleibt die ganze Figur identisch: Denn dieser Grundkreis als Orthogonalkreis aller Berührungskreise macht diese zu selbstentsprechenden, ihren inneren Ringkreis zum äusseren und umgekehrt, die Radien zu Radien. Wählte man das Transformationscentrum auf einem der Kreise 1 oder 2 selbst, so wird dieser Kreis zur Geraden, der andere zum Kreis, und man erhält wieder eine geschlossene Reihe von Berührungskreisen zwischen Gerade und Kreis. Die Mittelpunkte verteilen sich diesmal auf eine Parallele, wie sie sich in vorigen Fällen auf einer Ellipse bezw. auf den beiden Aesten der Hyperbel verteilten — keineswegs in regelmässigen Abständen, aber doch immer so, dass der Berührungskreis um den letzten Mittelpunkt wieder den Berührungkreis um den ersten Mittelpunkt und die beiden andern Kreise bezw. den Kreis und die Gerade berührt.

Die Thatsache bleibt sogar in Giltigkeit, wenn man die Tangenten der beiden Kreise als erste und letzte unter die Berührungskreise einbezieht. Dieser Umstand entsteht für gleichgrosse Kreise aus Figur 134, wenn man einen der Berührungspunkte der Berührungkreise unter sich zum Mittelpunkt macht. Für ungleichgrosse Kreise entsteht der Fall nicht aus Figur 134 mit Winkelteilung in n gleiche Teile; wohl aber aus einer so veränderten Figur, dass der letzte der gleichgrossen Berührungskreise den ersten nicht berührt, sondern schneidet. Wenn man dann einen dieser Schnittpunkte zum Transformationscentrum wählt, so werden diese einander schneidenden Berührungskreise zu Tangenten der gegebenen Kreise, und wenn die mit obiger Abänderung nach Figur 134 gebildete Originalfigur im übrigen eine geschlossene Reihe ergab, so muss auch zwischen beiden Tangenten eine geschlossene Reihe von Berührungskreisen vorhanden sein, deren erster die eine, deren letzter die andere Tangente berührt.

Erkl. 500. Nicht bei jedem beliebigen Kreispaar ist die Reihe der Berührungskreise eine geschlossene, wie auch nicht in jedem beliebigen koncentrischen Kreisringe. Vielmehr muss, um eine geschlossene Reihe zu erhalten, die Konstruktion des Kreisringes nach Erkl. 498 nach vorheriger Winkelteilung ausgeführt werden. Man kann also, wenn diese gegeben, den Radius der Berührungskreise und den des äusseren Ringkreises berechnen. Denn da die beiden rechtwinkligen Dreiecke in Figur 134 mit Seiten $r+\varrho$ und ϱ bezw. mit Seiten r und $\frac{1}{2}s_n$ ähnlich sind, so muss für Winkelteilung in n Teile:

$$\frac{r+\varrho}{\varrho}=\frac{2r}{s},\quad \varrho=\frac{sr}{2r-s},\quad R=r+2\varrho=\frac{r(2r+s_n)}{2r-s_n}\text{ sein.}$$

Hiernach lässt sich die Grösse R berechnen, bei welcher zu gegebenem r und n (bezw. s_n) eine geschlossene Berührungsreihe im koncentrischen Ring entsteht. Umgekehrt kann man auch aus R und r das zugehörige s_n berechnen und nachprüfen, ob ein Wert für s_n entsteht, welcher einen ganzzahligen Wert von n liefert. Ist aber diese Bedingung für den koncentrischen Ring erfüllt, so gilt dasselbe für die excentrischen Kreise. Denn wenn P der Transformationsmittelpunkt, M_0 der Mittelpunkt von Figur 134, M_1, M_2, R', r' die entsprechenden Grössen der transformierten Figur sind, so wird:

$$PM_1 \pm r' = \frac{k^2}{PM_0 \mp r},\quad PM_2 \pm R' = \frac{k^2}{PM_0 \mp R}.$$

Hieraus lässt sich berechnen R', r', PM_2 und PM_1 nach r, R, PM_0 und k, also auch M_1M_2. Und damit lässt sich auch rechnungsmässig die Bedingung aufstellen, welcher $r'R'$ und M_1M_2 genügen müssen, damit die geschlossene Reihe einmal und damit jedesmal ermöglicht ist.

Erkl. 501. Will man geometrisch untersuchen, ob zwei gegebene in- oder auseinanderliegende Kreise die Eigenschaft haben, geschlossene Reihen von Berührungskreisen zu ergeben, so kann dies geschehen durch Transformation der gegebenen Kreise in zwei koncentrische Kreise und Untersuchung der so entstandenen Kreisringe. Die Transformation zweier beliebig gegebenen nicht schneidenden Kreise in zwei koncentrische ist aber immer möglich nach Antwort der Frage 80, 3. Man muss nur als Transformationsmittelpunkt einen der beiden festen Büschelpunkte wählen, durch welche sämtliche Orthogonalkreise der beiden gegebenen hindurchgehen. Wird also nur ein einziger gemeinsamer Orthogonalkreis gezeichnet, so ist dessen Schnittpunkt mit der Centrale der gesuchte. Ist dann im Kreisring die Eigenschaft vorhanden, so gilt sie auch für die excentrischen Kreise. Und man wird für jedes gegebene Radienpaar $R'r'$ eine Centrale finden können, oder für jede gegebene Centralstrecke und ersten Radius einen zweiten Radius, welcher die Reihe der Berührungskreise zu einer geschlossenen macht.

Aufgabe 156. Man soll die Lage der Punkte XYZ im Satze von Paskal untersuchen bei verschiedenen Vertauschungen der sechs Eckpunkte.

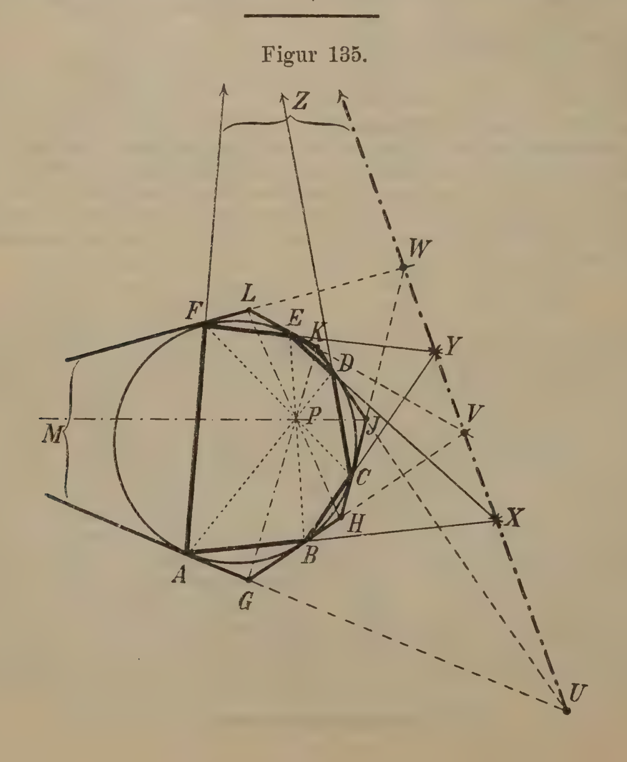
Auflösung. 1) Da die 6 Eckpunkte eines Paskalschen Sechsecks sich auf 60 verschiedene Arten verbinden lassen, so entstehen 60 verschiedene Paskalsche Geraden, und auf jeder 3 Punkte, so dass im ganzen 180 Punkte zu untersuchen wären. Nun ist aber ohne weitere Einzelheiten klar, dass wenn man etwa AB und DE in Figur 83 oder 84 als Gegenseiten festhält, dann die Vervollständigung des Sechsecks von B aus nur noch möglich ist durch BCD oder BFD oder BFE, also müssen je vier von den 60 Paskalschen Geraden durch einen gemeinsamen Punkt X hindurchgehen: man hat also nur noch $\frac{180}{4} = 45$ Punkte zu untersuchen, nämlich die 45 Nebenecken des vollständigen Sechsecks.

2) Ganz ähnliche Betrachtungen gelten wegen der dualistischen Uebertragung auch für die Punkte des Satzes von Brianchon.

Erkl. 502. Es bestehen allein über die gegenseitige Lage der 60 Paskalschen Geraden eines eingeschriebenen bezw. der 60 Brianchonschen Punkte eines umgeschriebenen vollständigen Sechsecks eine ganze Reihe der gelehrtesten Abhandlungen von bedeutenden Mathematikern. Die hauptsächlichsten Ergebnisse derselben sind von dem Geometer Steiner aufgestellt, und enthalten folgende Thatsachen als Grundlage:

Durch jede der 45 Nebenecken gehen 4 Paskalsche Gerade; die 60 Paskalschen Geraden gehen zu je 3 durch 20 („Steinersche“) Punkte, von welchen 10 auf den Polaren der andern 10 liegen; diese 20 („Steinerschen“) Punkte liegen zu je 4 auf 15 Geraden, welche selbst zu je 3 durch die 20 („Steinerschen“) Punkte hindurchgehen; u. s. w.	Auf jeder der 45 Nebenseiten liegen 4 Brianchonsche Punkte; die 60 Brianchonschen Punkte liegen zu je 3 auf 20 („Steinerschen“) Geraden, von welchen 10 durch die Pole der andern 10 gehen; diese 20 („Steinerschen“) Geraden gehen zu je 4 durch 15 Punkte, welche selbst zu je 3 auf den 20 („Steinerschen“) Geraden liegen; u. s. w.

Figur 135.



Aufgabe 157. Man soll untersuchen, wann in Figur 84 die Punkte XYZ und UVW alle sechs auf derselben Geraden liegen.

Erkl. 503. Wie aus dem Nebenstehenden hervorgeht, bedarf es zur Herbeiführung der vereinigten Lage der Punkte XYZ, UVW auf derselben Geraden nur der einzigen Bedingung, dass die drei Diagonalen AD, BE, CF durch denselben Punkt gehen. Während also für den allgemeinen Fall alle sechs Punkte willkürlich gewählt werden können, kann man nun immer noch fünf Punkte willkürlich wählen, den sechsten aber so, dass seine Diagonale durch den Schnittpunkt der beiden andern Diagonalen hindurchgeht.

Auflösung. 1) In Figur 84 geht die Polare von X durch die Punkte G und K, und durch den Schnittpunkt der Diagonalen AD und BE. Ebenso geht die Polare von Y durch H und L, und durch den Schnittpunkt der Diagonalen BE und CF. Wenn also die drei Diagonalen AD, BE, CF durch denselben Punkt gehen, dann ist XY die Polare dieses Punktes; und auf dieser Polaren müssen sich befinden die Schnittpunkte der Tangenten der Punkte A und D, B und E, C und F, d. h. die Punkte U, V, W.

2) Für den entsprechenden Fall des Satzes von Paskal gehen sechs gerade Linien durch denselben Punkt — und dies ist der Fall bei genau derselben Figur, nämlich im Innern des Kreises beim Pol der Geraden $XYZUVW$.

Aufgabe 158. Man soll in einem Kreispunkte bloss mit Lineal die Tangente konstruieren.

Erkl. 504. Die dualistische Aufgabe zur nebenstehenden wäre die, auf einer Kreistangente den Berührungspunkt zu finden, wenn vier andere Tangenten desselben gegeben wären: Man bezeichnet wieder in Figur 90 als E den gesuchten Berührungspunkt, zieht durch die Schnittpunkte der gegebenen fünf Tangenten die Geraden GK und JM und durch deren Schnittpunkt P die Gerade HP. Diese trifft die Tangente KM im gesuchten Berührungspunkte E.

Auflösung. Bezeichnet man den gegebenen Berührungspunkt der gesuchten Tangente nach Figur 90 als Punkt E, und wählt auf dem kontinuierlich gezeichneten Kreise vier weitere Punkte $ABCD$, so liefern AB und ED den Punkt X, AE und CD den Punkt Z; auf der Geraden XZ liefert BC den Punkt Y, und die Verbindungslinie EY muss nach Satz 23a die gesuchte Tangente in E sein.

Erkl. 505. Die Sätze von Paskal und Brianchon sind geeignet, zu fünf gegebenen Elementen bloss mit Lineal ein sechstes zu finden. Dabei können fünf Punkte, oder vier Punkte mit der Tangente in einem derselben, oder drei Punkte mit Tangenten in zweien derselben, oder drei Tangenten mit Berührungspunkten auf zweien derselben, oder vier Tangenten mit dem Berührungspunkte auf einer derselben, oder fünf Tangenten als Bestimmungsstücke auftreten. Die wichtigste Anwendung erfahren diese Sätze daher bei den Kurven zweiter Ordnung, für welche sie volle Geltung haben. Der Kreis aber ist schon durch drei Bestimmungsstücke festgelegt, und daher weniger geeignet, um die Wichtigkeit dieser Sätze zu zeigen.

Anmerkung. Da die Aufgaben des Apollonius und des Malfatti in dem dieser Encyklopädie angehörigen Buche von Cranz, „Das Apollonische Berührungsproblem und verwandte Aufgaben“, in besonders ausführlicher Behandlung enthalten sind, so möge an dieser Stelle wegen einzelner Aufgaben zu diesen Problemen auf das genannte Werk verwiesen werden.

---

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 159. Man soll die bemerkenswerteste Eigentümlichkeit der mit Lineal allein auszuführenden Tangentenkonstruktion auffeststellen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 148.

Aufgabe 160. Welches sind die Konstruktionsweisen von Pol und Polare für Kreispunkte und Tangenten?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 149.

Aufgabe 161. Man bestimme die möglichen Lagen der Nebenseiten von Sehnenvierecken.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 150.

Aufgabe 162. Welche Eigenschaften haben Tangentenvierecke mit parallelen Gegenseiten?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 150.

Aufgabe 163. Man soll auf beliebige Weise zwei inverse Punktepaare darstellen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 151.

Aufgabe 164. Wie entsprechen sich reciprok die Flächenteile eines Orthogonalkreises?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 152.

Aufgabe 165. Man soll auf die Figur 124 die Inversion anwenden.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 153.

Aufgabe 166. Man bilde die inverse Figur zu drei gleichgrossen, unter gleichen Winkeln schneidenden Kreisen wie Figur 133.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 154.

Aufgabe 167. Man untersuche die inverse Figur zu einem Parallelstreifen mit eingeschriebenen Berührungskreisen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 155.

Aufgabe 168. Man untersuche die Beziehungen der Elemente des Sechsecks zu den Sätzen von Paskal und Brianchon.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 156.

Aufgabe 169. Man soll die Sätze von Paskal und Brianchon feststellen für die Eckpunkte und Tangenten eines regelmässigen Sechsecks.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 157.

Aufgabe 170. Von einem Kreise seien zwei Punkte samt Tangenten gegeben. Man soll α) in einem weiteren gegebenen Punkte die Tangente, β) auf einer weiteren gegebenen Tangente den Berührungspunkt bloss mit Lineal konstruieren.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 158.

Ergebnisse der ungelösten Aufgaben.

---

16. Aus dem Satze von Carnot kann der Satz des Menelaos entstehen, wenn in Figur 99 $_{2, 3, 4}$ jeweils die Punkte $D_2 E_2 F_2$ ins Unendliche rücken. Dann entsteht:

$$AF_1 \cdot BD_1 \cdot CE_1 \cdot \infty \cdot \infty \cdot \infty = F_1 B \cdot D_1 C \cdot E_1 A \cdot \infty \cdot \infty \cdot \infty .$$

Und wegen der besonderen Art der Beziehung kann hier ausnahmsweise mit ∞^3 gekürzt werden, und bleibt:

$$AF_1 \cdot BD_1 \cdot CE_1 = F_1 B \cdot D_1 C \cdot E_1 A.$$

17. Jede Berührung bringt ein Zusammenfallen zweier Punkte $D_1 D_2$ oder $E_1 E_2$, $F_1 F_2$. Man erhält also bei ein-, zwei- oder dreimaliger Berührung auf beiden Seiten der Gleichung des Carnotschen Satzes (erster Fassung) ein, zwei oder drei Quadrate. Im letzten Falle entsteht dann durch Wurzelziehen die in Antwort der Frage 68 des VII. Teiles dieses Lehrbuches abgeleitete Beziehung für die Ecktransversalen der Berührungspunkte der In- und Ankreise.

18. Man kann, wenn der Durchmesser des gegebenen Kreises kleiner als a ist, statt die Strecke a selbst stetig zu teilen, einen beliebigen Bruchteil derselben $\left(\frac{a}{n}\right)$ stetig teilen. Der entstehende goldene Abschnitt ist derselbe Bruchteil des gesuchten Abschnitts x, denn wenn $x^2 = a(a + x)$, so ist auch:

$$\left(\frac{x}{n}\right)^2 = \frac{a}{n}\left(\frac{a}{n} + \frac{x}{n}\right).$$

19. Der Winkel von 72^0 ist in Aufgabe 4 samt jenem von 36^0 gefunden. Um einen Winkel von 18^0, 9^0 u. s. w. zu konstruieren, hat man den nach Aufgabe 4 gefundenen Winkel von 36^0 fortgesetzt zu halbieren.

20. Um einen Winkel von 21^0 zu konstruieren, kann man einen von:

$$24^0 = 15^0 + 9^0 = \frac{1}{4}(60^0 + 36^0)$$

dreimal nacheinander halbieren, und eines der so entstehenden Achtel $\left(\frac{24^0}{8} = 3^0\right)$ abziehen; Rest $24^0 - 3^0 = 21^0$.

21. Ist von einem gleichschenkligen Dreieck die Bedingung $\alpha = 2\gamma$ und die Fläche in Quadratform gegeben, so folgt:

$$\alpha = \beta = 2\gamma,\ \alpha + \beta + \gamma = 180 = \alpha + \alpha + \frac{\alpha}{2} = \frac{5\alpha}{2},\ \alpha = \frac{2}{5} \cdot 180 = 72 = \beta,\ \gamma = 36 \cdot \cdot$$

Man verwandle also erst das Quadrat in ein Dreieck mit Winkel 45^0, dieses in ein Dreieck mit Winkel 36^0, und suche die mittlere Proportionale der anliegenden Seiten. Diese ist die gesuchte Schenkellänge (vergl. Satz 18 des V. Teiles dieses Lehrbuches).

22. Bei Veränderung der Reihenfolge der Seiten des Sehnenvierecks $abcd$ oder $abdc$ erhält man zwar drei verschiedene Sehnenvierecke, aber mit gleicher Fläche und gleichem Kreisradius.

23. α) $a = 7,\quad b = 10,\quad c = 13,\quad d = 16;\quad ef = 251,\quad fg = 278,\quad ge = 242,$

$$efg = 22\sqrt{34889};\quad e = \frac{11}{139}\sqrt{34889},\quad f = \frac{1}{11}\sqrt{34889},\quad g = \frac{22}{251}\sqrt{34889},$$

$$F = 4\sqrt{910},\qquad r = \frac{11}{2}\sqrt{\frac{34889}{910}} = \frac{11}{1820}\sqrt{31748990}.$$

β) $a = 10,\quad b = 18,\quad c = 21,\quad d = 35;\quad ef = 840,\quad fg = 915,\quad ge = 728,$

$efg = 840\sqrt{793};\qquad e = \frac{56}{61}\sqrt{793},\qquad f = \frac{15}{8}\sqrt{793},\qquad g = \sqrt{793};$

$$F = 336,\qquad r = \frac{5}{8}\sqrt{793}.$$

γ) $a = 1{,}9,\quad b = 32{,}5,\quad c = 50,\quad d = 52;\quad e = 34,\quad f = 52{,}5,\quad g = 50{,}7,$

$$F = 835{,}38,\qquad r = 27\frac{1}{12}.$$

24. $a = 30,\ b = 21,\ e = 5,\ d = 14$ liefert:

$ef = 444,\quad fg = 700,\quad eg = 525,\quad efg = 2100\sqrt{37};\quad e = 3\sqrt{37},\quad f = 4\sqrt{37},$

g (zu einem Sehnenviereck, aber nicht mehr zu einem Kreisviereck gehörig) $= \frac{175}{37}\sqrt{37}.$

$$F = 210,\qquad r = \frac{5}{2}\sqrt{37} = 15{,}2,\qquad \varrho = \frac{210}{35} = 6.$$

25. Da alle vier Winkel gegeben sind, so kann auch das Dreieck DGH in Figur 102 der Gestalt nach konstruiert werden. Gibt man dann der gegebenen Seite die vorgeschriebene Länge und zeichnet den Inkreis dieses neuen Dreiecks, so ist dessen Tangente unter vorgeschriebenem Winkel die gesuchte vierte Seite des Kreisvierecks.

---

37. Die Werte U_3, u_3, U_6, u_6 sind $6r\sqrt{3}$, $3r\sqrt{3}$, $4r\sqrt{3}$, und

$\frac{1}{U_6} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{U_3} + \frac{1}{u_3}\right)$ gibt $\frac{1}{4r\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6r\sqrt{3}} + \frac{1}{3r\sqrt{3}}\right) = \frac{1+2}{2\cdot 6\cdot r\sqrt{3}} = \frac{1}{2\cdot 2\cdot r\sqrt{3}};$

$u_6 = \sqrt{u_3 U_6}$ gibt $6r = \sqrt{3r\sqrt{3}\cdot 4r\sqrt{3}} = \sqrt{3\cdot 3\cdot 4r^2}.$

Die Werte f_3, F_3, f_6, F_6 sind $\frac{3}{4}r^2\sqrt{3}$, $3r^2\sqrt{3}$, $\frac{3}{2}r^2\sqrt{3}$, $2r^2\sqrt{3}$; und

$f_6 = \sqrt{f_3 F_3}$ gibt $\frac{3}{2}r^2\sqrt{3} = \sqrt{\frac{3}{4}r^2\sqrt{3}\cdot 3r^2\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3\cdot 3\cdot 3}{4}r^2};$

$\frac{1}{F_6} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{F_3} + \frac{1}{f_6}\right)$ gibt $\frac{1}{2r^2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3r^2\sqrt{3}} + \frac{2}{3r^2\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{2\cdot 3r^2\sqrt{3}}.$

38. Die Formel $f_{2n} = \frac{n}{2} r s_n$ bestätigt sich aus der Tabelle durch:

$$f_6 = \frac{3}{2}r^2\sqrt{3} = \frac{3}{2}\cdot r\cdot s_3 = \frac{3}{2}\cdot r\cdot r\sqrt{3};$$

oder:

$$f_8 = 2r^2\sqrt{2} = \frac{4}{2}r\cdot s_4 = 2r\cdot r\sqrt{2} \text{ u. s. w.}$$

$$f_{10} = \frac{5}{4}r^2\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = \frac{5}{2}\cdot r\cdot s_5 = \frac{5}{2}r\cdot\frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}};$$

$$f_{12} = 3r^2 = \frac{6}{2}r\cdot s_6 = 3r\cdot r.$$

39. $f_{20} = \frac{5}{2}r^2\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \frac{5}{2}r^2\left[\sqrt{\frac{1}{2}(6 + \sqrt{16})} - \sqrt{\frac{1}{2}(6 - \sqrt{16})}\right] = \frac{5}{2}r^2(\sqrt{5} - 1),$

$f_{24} = 6r^2\sqrt{2 - \sqrt{3}} = 6r^2\left[\sqrt{\frac{1}{2}(2 + \sqrt{1})} - \sqrt{\frac{1}{2}(2 - \sqrt{1})}\right]$

$= 6r^2\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = 3r^2(\sqrt{6} - \sqrt{2}).$

40. Beim Achteck sind auf das Viereck s_4^2 vier gleichschenklige Dreiecke aufgesetzt mit Grundseite s_4, Höhe $r - \frac{s_4}{2}$. Also Achteckfläche gleich:

$$s_4^2 + 4\cdot\frac{s_4}{2}\left(r - \frac{s_4}{2}\right) = s_4^2 + 2s_4 r - s_4^2 = 2s_4 r = 2r^2\sqrt{2}.$$

41. α) $s_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1) = a$ gibt $r = \frac{2a}{\sqrt{5}-1} = \frac{a}{2}(\sqrt{5}+1)$,

β) $\varrho_6 = \frac{r}{2}\sqrt{3} = a$ gibt $r = \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}a\sqrt{3}$,

γ) $u_3 = 3r\sqrt{3} = a$ gibt $r = \frac{a}{3\sqrt{3}} = \frac{a}{9}\sqrt{3}$,

δ) $f_{12} = 3r^2 = a^2$ gibt $r = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a}{3}\sqrt{3}$.

42. α) $S_{12} = 2r\sqrt{7-4\sqrt{3}} = a$ gibt $r = \frac{a}{2\sqrt{7-4\sqrt{3}}} = \frac{a\sqrt{7+4\sqrt{3}}}{2}$,

β) $U_5 = 10r\sqrt{5-2\sqrt{5}} = a$ gibt $r = \frac{a}{10\sqrt{5-2\sqrt{5}}} = \frac{a\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{10\sqrt{5}}$

$= \frac{a}{50}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$,

γ) $F_8 = 8r^2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = a^2$ gibt $r^2 = \frac{a^2}{8}\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} = \frac{a^2}{8}\sqrt{\frac{4+4\sqrt{2}+2}{4-2}}$

$= \frac{a^2}{8}\sqrt{3+2\sqrt{2}}, \qquad r = \frac{a}{4}\sqrt[4]{12+8\sqrt{2}}$.

43. α) Um die Seite des umgeschriebenen Sechsecks zu rechnen, wenn die Fläche des eingeschriebenen gegeben ist, setzt man:

$$f_6 = a^2 = \frac{3}{2}r^2\sqrt{3},\quad r^2 = \frac{2a^2}{3\sqrt{3}} = \frac{a^2}{9}\sqrt{12};\quad S_6 = \frac{2}{3}r\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{a}{3}\sqrt[4]{12} = \frac{2a}{9}\sqrt[4]{108}.$$

β) F_3 aus f_3 gibt:

$$f_3 = \frac{3}{4}r^2\sqrt{3},\quad r^2 = \frac{4f_3}{3\sqrt{3}};\quad F_3 = 3r^2\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}\cdot 4f_3}{3\sqrt{3}} = 4f_3.$$

44. $$\varrho_{2^z\cdot n} = \frac{r}{2}\sqrt{\underset{1}{\left[2+\right.}\sqrt{\underset{2}{\left(2+\right.}\sqrt{\underset{3}{\left[2+\right.}\cdots\sqrt{\underset{z-1}{\left(2+\right.}\sqrt{\underset{z}{\left\{2+\right.}\sqrt{4-\left(\frac{s_n}{r}\right)^2}\left.\right\}}\left.\right)}\left.\right]\cdots}\left.\right)}\left.\right]}.$$

Und die andern nach den Formeln:

$$S = \frac{s\cdot r}{\varrho};\quad f_n = \frac{n}{2}s\cdot\varrho;\quad F_n = \frac{n}{2}rS_n.$$

45. Nach der Formel für $s_{\frac{1}{2}n}$ könnte man für jedes Vieleck, dessen Seite s_n bekannt ist, die Sehnen zu $\frac{2}{n}, \frac{4}{n}, \frac{8}{n}$ u. s. w. der Peripherie bestimmen, aber auch nur die in dieser Reihe enthaltenen Diagonalen bezw. Seiten von Sternvielecken bezw. deren Ergänzungen zu $\frac{n}{n}$; die übrigen erfordern gesonderte Bestimmung.

46. Der allgemeine Ausdruck der sog. „rekurrierenden oder rekurrenten Reihe“ der $s_{\frac{n}{k}}$ ist:

$$s_{\frac{n}{k}} = \frac{1}{r}\left(s_{\frac{n}{k-1}}\,\varrho_{\frac{n}{k-2}} + s_{\frac{n}{k-2}}\,\varrho_{\frac{n}{k-1}}\right).$$

47. Zur Bestimmung der Anzahl verschiedener Diagonalgrössen der Vielecke von 40 bezw. 48 Seiten sucht man die Zahlen unter 20 bezw. 24, die relativ prim zu 40 bezw. 48 sind, also 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19 für 40 und 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 für 48. Demnach hat sowohl das 40-Eck als das 48-Eck je 7 verschiedene Diagonalgrössen und geschlossene Sternvielecke. Darunter sind aber nicht die Seiten des 4-, 5-, 8-, 10-Ecks bezw. des 3-, 4-, 6-, 8-, 12-, 16-Ecks.

48. $s_{\frac{12}{5}} = r\sqrt{2+\sqrt{3}}$; $s_{\frac{15}{7}} = r\sqrt{2+\frac{1}{2}\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}}$;

$s_{\frac{16}{7}} = r\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

---

71. α) $1{,}047197 = \frac{\pi}{3}$; β) $0{,}107304 = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$.

72. $4{,}5825757 + \frac{1}{2}\cdot 1{,}11803399 - 2 = 2{,}5825757 + 0{,}5590169 = 3{,}1415976$, also auf 7 Stellen genau.

73. 1) Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit Hypotenuse $5r$, Kathete $2r$.

2) Halbe Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit Katheten r und $\frac{r}{2}$.

3) Summe beider Strecken vermindert um $2r$ gibt πr, die Länge des Halbkreises.

74. 1) Ist der Durchmesser der Tischplatte $1\frac{1}{2}$ m, so braucht man zum Umspannen ein Band von 4,71 m.

2) Ist eine Radspaiche gleich $\frac{3}{4}$ m, so läuft das Rad bei 1000 Umläufen über eine Strecke von 4712,4 m.

75. 1) Wird der Baumstamm von 4 Männern umspannt, so ist der Radius 0,6366 von der Spannweite eines einzelnen.

2) Hat sich ein Rad auf 1 Kilometer 300 mal gedreht, so ist sein Umfang $\frac{1000}{300}$ m, der Durchmesser 1,06 m.

76. Für Radius 1 ist
für 79° der Bogen 1,37881
für 38′ der Bogen 0,01105
für 54″ der Bogen 0,00026

also bei Radius 20 für 79° 38′ 54″ der Bogen 1,39012 · 20 = 27,8024 m.

77. $20 = \frac{\pi r}{180}\cdot 85^0\,17'\,30'' \doteq \frac{\pi r}{180}\cdot 85{,}29166^0$; $r = \frac{20\cdot 180}{85{,}291\,\pi} = 13{,}43$ m.

78. Gegebener Bogen für Radius 1 gleich 54,7 : 20 = 2,735

Gefundener Bogen	2,722714 ···	156°
Restbogen	0,012286	
Gefundener Bogen	0,012217 ···	42′
Restbogen	0,000069	
Gefundener Bogen	0,000068 ···	14″

also 156° 42′ 14″.

79. 60 Zähne zu 0,9 und ebensoviele Lücken zu 1,1 mm bilden einen Umfang von 120 mm. Ist $2\pi r = 120$, so wird:

$$r = \frac{60}{\pi},\quad r^2 = \frac{3600}{\pi^2},\quad \pi r^2 = \frac{3600}{\pi} = 1146 \text{ qmm} = 11{,}46 \text{ qcm}.$$

80. Quadratseite $= \frac{80}{4} = 20$, Quadratfläche $= 400 = r^2\pi$, $r = \frac{20}{\sqrt{\pi}}$, $2\pi r = 40\sqrt{\pi} = 70{,}9$.
Der Umfang vermindert sich also fast um 10 m, wenn man dieselbe Fläche als Kreis statt als Quadrat darstellt.

81. Die Radien (und ebenso die Durchmesser) zweier Kreise verhalten sich wie die Umfänge, also wie die Quadratwurzeln der Flächeninhalte.

82. $\frac{\pi r^2}{360}\cdot 40^0\,34'\,10'' = 35{,}4$ qm.

83. $470 \text{ qcm} = \frac{\pi r^2}{360} \cdot 100^0 30'$ gibt $r = \sqrt{\frac{470 \cdot 360}{\pi \cdot 100{,}5}} = \sqrt{\frac{4}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{42300}{100{,}5}} = 23{,}2$ cm.

84. $\alpha = \frac{360}{r^2 \pi} \cdot 128 \text{ qm} = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{256}{100} = 146^0\, 40''.$

85. $u = \frac{2\pi r}{12} + s_{12} = \frac{\pi}{3} + 2\sqrt{2 - \sqrt{3}} = 2{,}08247381$ cm,

$f = \frac{1}{12}(\pi r^2 - 3r^2) = \frac{\pi}{3} - 1 = 0{,}047198$ qcm.

86. $U = a + \frac{2\pi r}{4} = a + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{2} = \frac{a}{4}(4 + \pi\sqrt{2}) = a \cdot 2{,}108;$

$F = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = a^2 \cdot 0{,}093;$

$u = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{2\pi\varrho}{4} = a + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{4}(4 + \pi) = a \cdot 1{,}786;$

$f = \frac{a^2}{4} - \frac{\pi\varrho^2}{4} = \frac{a^2}{4} - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = a^2 \cdot 0{,}053.$

87. Zwischen Durchmesser und einer halbsogrossen Sehne liegt ein Flächenstück vom Umfang:

$$2r + r + 2 \cdot \frac{2\pi r}{6} = \frac{\pi}{3}(9 + 2\pi).$$

Der Flächeninhalt ist $\frac{\pi r^2}{2}$ — Segment. Letzteres gehört zu einer Sechsecksseite, ist also:

$$\frac{\pi r^2}{6} - \frac{s_6 \varrho_6}{2} = \frac{\pi r^2}{6} - \frac{r}{2} \cdot \frac{r}{2}\sqrt{3} = \frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2}{4}\sqrt{3}.$$

Also:

$$f = \frac{\pi r^2}{3} + \frac{r^2}{4}\sqrt{3}.$$

Dasselbe Ergebnis entsteht auch durch Zerlegung (bei paralleler Lage) in:

$2 \cdot \frac{\pi r^2}{6} + \triangle = \frac{\pi r^2}{3} + \frac{r^2}{4}\sqrt{3}$: giltig bei jeder Lage von Durchmesser und Sehne.

88. Fläche des Rechtecks $a \cdot b$. Gemeinsame Sehne der Kreise ist Dreiecksseite in beiden, also deren Segment in zwei Hälften vorhanden, gleich $\frac{\pi r^2}{3} - \frac{s_3 \varrho_3}{2} = r^2\left(\frac{\pi}{3} - \sqrt{\frac{3}{4}}\right);$

$F = a \cdot b + a^2\left(\frac{\pi}{3} - \sqrt{\frac{3}{4}}\right);$ Umfang $2b + a + 2 \cdot \frac{2\pi r}{6} = 2b + a\left(1 + \frac{2\pi}{3}\right).$

89. Sonnenscheibe πr^2, Mondscheibe $\pi\left(\frac{11}{12}r\right)^2$; Differenz $\frac{144 - 121}{144}\pi r^2 = \frac{13}{144}\pi r^2 < \frac{1}{11}$ Sonnenscheibe.

90. $U = 2 + 2 + \frac{2\pi\alpha}{360}(R + r) = 4 + \frac{\pi}{10} \cdot \frac{360 - 4 \cdot 20}{4} = 4 + 7\pi = 26$ m;

$f = \frac{\pi\alpha}{360}(R^2 - r^2) = 7\pi = 22$ qm. Also zus. 104 m Gitter und für 88 qm Grassamen.

91. Zeichnet man Halbkreise auf verschiedenen Seiten der aufeinanderfolgenden Teile des Durchmessers, so entstehen stets nur zwei Flächenstücke im grossen Kreise. Deren Umfänge sind wieder gleichgross und gleich dem Kreisumfang $2\pi r$; die Flächen sind gleich bei geradem n, unterscheiden sich um $\frac{\pi}{n^2} \cdot r^2$ bei ungeradem n.

92. α) Ist $a = 1{,}4$; $b = 3{,}5$, so ist $U = \pi(a + b) = \frac{22}{7} \cdot 4{,}9 = 15{,}4,$

$$f = \pi a b = \frac{22 \cdot 1.4 \cdot 3{,}5}{7} = 15{,}4.$$

β) Ist $a = b = r$, so entsteht Kreis $\pi(a + b) = 2\pi r$, $\pi a b = \pi r^2$.

111. Beim Grenzwert $v = +0$ entsteht in Figur 118 und 119 als Abbildung vom Kreis M_1 jedesmal Punkt S als Kreis mit ∞ kleinem Radius; für $v = +\infty$ ebenso in beiden Figuren Kreis M_1 als Abbildung von sich selbst; für $v = -1$ wieder in beiden Figuren als Abbildung von M_1 die unendlich ferne Gerade als Kreis mit ∞ grossem Radius; für $v = +1$ entsteht in Figur 118 in halber Entfernung von S ein Kreis M_2 mit Radius $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$. Somit entsteht für $v = +\frac{3}{2}$ in $\frac{3}{5}$ Entfernung von S der Kreis M_2 mit Radius $\frac{3}{3+2} = \frac{3}{5}$; für $v = -\frac{3}{2}$ entsteht in dreifacher Entfernung von S der Kreis M_1 mit Radius $\frac{3}{3-2} = 3$.

112. Um bloss mit Lineal die gemeinsamen Tangenten zweier Kreise zu ziehen, benutzt man Aufgabe 94 und dann die Konstruktion nach Erkl. 279.

113. $P_1K_1 = \cdots \frac{1}{2}\left(\sqrt{c^2-(r_2-r_1)^2} - \sqrt{c^2-(r_2+r_1)^2}\right)$.

114. $c = 13$; $r_1 = 3{,}5$; $r_2 = 8{,}5$ liefert $M_1A = 9{,}1$; $M_2A = 22{,}1$, $M_1J = \frac{91}{24}$, $M_2J = \frac{221}{24}$; $P_1P_2 = 12$, $R_1R_2 = 5$; $AP_1 = 8{,}4$, $AP_2 = 20{,}4$; $JR_1 = \frac{35}{24}$, $JR_2 = \frac{85}{24}$.

115. $a = 30 = \frac{180}{n}$ gibt $n = 6$, Möndchen $B = \frac{\pi r^2}{32} + \frac{r}{8}\cdot\frac{r}{2}\sqrt{3} - \frac{r^2\pi}{24}$,

$$\text{Möndchen } A = \frac{\pi r^2\cdot 3}{8\cdot 4} + \frac{r}{8}\cdot\frac{r}{2}\sqrt{3} - \frac{4}{6}\cdot\frac{r^2\pi}{8},$$

beide mit genau gleichem Ergebnis wie in Aufgabe 98.

116. Sind beide Kreise degeneriert, so hat man P_1P_2 oder P_1g_2 oder g_1g_2. Für ersten Fall ist als A jeder äussere, als J jeder innere Punkt der Geraden P_1P_2 wählbar. Für P_1g_2 hat P beiderlei Eigenschaft. Für $g_1 \parallel g_2$ kann jeder beliebige Punkt der Ebene, für schneidende g_1g_2 nur ein unendlich ferner Punkt der Ebene als Aehnlichkeitspunkt gelten.

117. Für $c = 13$, $r_1 = 8{,}5$, $r_2 = 3{,}5$ wird:

für S_a: $t_1 = 8{,}4$, $t_2 = 20{,}4$; gem. Pot. $= \frac{8{,}5}{3{,}5}\cdot 8{,}4^2 = \frac{3{,}5}{8{,}5}\cdot 20{,}4^2 = 171{,}36$,

für S_i: $t_1 = \frac{85}{24}$, $t_2 = \frac{35}{24}$; gem. Pot. $= \frac{8{,}5}{3{,}5}\left(\frac{35}{24}\right)^2 = \frac{3{,}5}{8{,}5}\left(\frac{85}{24}\right)^2 = \frac{2975}{576}$.

118. Die auf der Centralen gelegenen Punkte der Hyperbeln sind jeweils Mittelpunkte der kleinsten aller gleichartigen Kreise: deren Durchmesser sind gebildet von der kleinsten bezw. grössten Abstandsstrecke zwischen Punkten der beiden Kreise.

119. Für zwei koncentrische Kreise ist M zugleich $M_1M_2S_aS_i$, $c = 0$, beiderlei $t_1 = r_1$, $t_2 = r_2$, beiderlei „gemeinschaftliche Potenz" gleich r_1r_2, Radien sämtlicher Berührungskreise $\frac{r_1-r_2}{2} = \varrho$, so dass in der That:

$$(r_2+\varrho)^2 - \varrho^2 = r_2^2 + 2r_2\varrho = r_2^2 + 2r_2\left(\frac{r_1-r_2}{2}\right) = r_2^2 + r_1r_2 - r_2^2 = r_1r_2.$$

120. Bei ineinanderliegenden Kreisen geben die auf der Centralen gelegenen Punkte der beiden Ellipsen je den Mittelpunkt des grössten und den des kleinsten Berührungskreises mit Radius $\frac{r_1 \pm r_2 \pm c}{2}$.

121. Bei schneidenden Kreisen geben die auf der Centralen gelegenen Punkte der Hyperbel den Mittelpunkt des kleinsten Berührungskreises, der beide gegebenen einschliesst, und den des grössten Berührungskreises, der von beiden eingeschlossen wird; die auf der Centralen gelegenen Punkte der Ellipse die Mittelpunkte der grössten ungleichartigen Berührungskreise, Radien $\frac{r_1+r_2\pm c}{2}$.

122. Aehnlichkeitspunkte zwischen Gerade und Kreis sind die Durchmesserendpunkte, also Konstruktion wie Aufgabe 104. Ausserhalb liegender Kreis liefert X_a und X_e, schneidender zwei X_a, berührender ein X_a.

123. Sind zwei Kreise mit ihren beiden Aehnlichkeitspunkten vorhanden, so braucht man zu einem dritten Kreise nur noch einen Aehnlichkeitspunkt zu konstruieren, und findet die drei andern durch gerade Linien.

124. Für Punkte innerhalb des Apollonischen Kreises ist der Tangentenwinkel des kleineren Kreises stets grösser; für Punkte ausserhalb desselben stets kleiner als der Tangentenwinkel des grösseren Kreises. Ausnahme bildet unendliche Entfernung, wofür an beiden Kreise der Tangentenwinkel Null entsteht.

125. Aus unendlicher Entfernung hat man an jeden der drei Kreise Tangentenwinkel Null, nämlich parallele Tangenten.

126. Setzt man (dem Verhältnis der Figur 127 ungefähr entsprechend) $r_2 = 1$, $r_1 = 4$, $c = 8$, so wird r_3 liegen müssen zwischen $\frac{3a}{8} - 1$ und $\frac{5a}{8} + 1$. Ist dann etwa $a = 8$, so wird $2 < r_3 < 6$, d. h. in Entfernung $M_2 M_3$ (Figur 127) von M_2 besteht der Aehnlichkeitspunkt nur, wenn r_3 nicht kleiner als 2 und nicht grösser als 6 ist. In Figur 127 ist r_3 auf $M_2 T$ kleiner als 1, daher kein Aehnlichkeitspunkt. Und auf SM_2 in einer Entfernung 8 von M_2 müsste r_3 kleiner als 6 sein, sonst fällt S innerhalb des Kreises $M_2 J$.

---

137. In Figur 129 ist:

$$\begin{aligned} CA_2 : CB_1 &= (M_2 C - r_2) : (M_1 C - r_1) = \left(\frac{c^2 + r_2^2 - r_1^2}{2c} - r_2\right) : \left(\frac{c^2 + r_1^2 - r_2^2}{2c} - r_1\right) \\ &= (c^2 - 2cr_2 + r_2^2 - r_1^2) : (c^2 - 2cr_1 + r_1^2 - r_2^2) \\ &= [(c - r_2)^2 - r_1^2] : [(c - r_1)^2 - r_2^2] \\ &= (c - r_2 + r_1)(c - r_2 - r_1) : (c - r_1 + r_2)(c - r_1 - r_2) \\ &= (c - r_2 + r_1) : (c - r_1 + r_2) \\ &= (M_1 M_2 - M_2 A_2 + M_1 A_1) : (M_1 M_2 - M_1 B_1 + M_1 B_2) = A_1 A_2 : B_1 B_2. \end{aligned}$$

138. Potenzlinie zweier gleichen Kreise ist die Mittelsenkrechte, zweier koncentrischen Kreise die unendlich ferne Gerade.

139. Setzt man den Ausdruck $\frac{c^2 + r_1^2 - r_2^2}{2c} = m =$ Minimum, so kommt die quadratische Gleichung $c^2 - 2mc + (r_1^2 - r_2^2) = 0$; $c = m \pm \sqrt{m^2 - (r_1^2 - r_2^2)}$. Also ist Minimalwert $m = c$, nämlich für $m = \sqrt{r_1^2 - r_2^2} = c$.

140. Wenn zwei feste Kreise I, II durch beliebige andere Kreise geschnitten werden, so liegen die Schnittpunkte der gemeinsamen Sehnen I, III und II, III stets auf einer Geraden, nämlich der Potenzlinie der beiden gegebenen Kreise.

141. Wird ein Kreis M und ein Punkt P von beliebigen Kreisen geschnitten, und man zieht deren Sehnen in M und deren Tangenten in P, so ist der geometrische Ort der Schnittpunkte dieser Sehnen und Tangenten die Potenzlinie zwischen M und P.

142. Man erhält den Satz: Wenn zwei Kreispaare einander beide gleichartig (oder beide ungleichartig) berühren, so ist je die Potenzlinie des einen Kreises ein äusserer (oder innerer) Aehnlichkeitsstrahl des andern Kreispaares.

143. Um die Potenzkreise zweier Kreise $M_1 M_2$ zu erhalten, zieht man irgend einen gleichartigen und einen ungleichartigen Berührungskreis, z. B. den Halbkreis über $A_2 B_1$ und $B_1 B_2$ und zieht um S_a einen Kreis mit der Tangentenlänge an den ersten, um S_i einen Kreis mit der senkrechten Halbsehne im letzteren.

144. Bei gleichgrossen schneidenden Kreisen fällt die Gerade AB und der Potenzkreis um S_a zusammen, Potenzkreis um S_i wird Halbkreis über AB.

145. Wenn die Kreise $M_1 M_2$ der Figur 124 einander berühren, so geht auch der „innere Potenzkreis" durch den Berührungspunkt, der äussere schrumpft zum Berührungspunkt selbst zusammen.

146. Für koncentrische Kreise bilden alle koncentrischen Kreise das eine, ihre Durchmesser das zugehörige Büschel.

147. Für gleichgrosse schneidende oder auseinanderliegende Kreise bringt die Symmetrie keinerlei Abweichung vom allgemeinen Falle.

---

159. Die bemerkenswerteste Eigenschaft dieser Konstruktion ist die, dass der Kreismittelpunkt völlig ausser Betracht bleibt, dagegen muss der Kreis kontinuierlich gezeichnet vorliegen.

160. Für Kreispunkte oder Tangenten bedarf es keiner Konstruktion, da Tangente und Berührungspunkt selbst Polare und Pol sind.

161. Liegt der Punkt innen, die Gerade aussen, so wird das Sehnenvierseit und das Tangentenviereck konvex, liegt der Punkt aussen, die Gerade innen, so wird Sehnenvierseit bezw. Tangentenviereck überschlagen.

162. Sehnenvierecke, welche den Kreismittelpunkt als Diagonalenschnittpunkt haben, sind immer Rechtecke, haben also zwei unendlich ferne Nebenecken; Tangentenvierecke mit parallelen Gegenseiten sind immmer Rhomben mit Diagonalenschnittpunkt im Kreismittelpunkt.

163. Man verfährt nach Figur 70 des VI. Teiles dieses Lehrbuches, indem man die vom Transformationsmittelpunkt E ausgehenden Strahlen EA und EB durch einen beliebigen Kreis schneidet.

164. Der Aussenfläche eines Orthogonalkreises entspricht invers die Innenfläche; und nur in einer der beiden Flächen kann der Mittelpunkt liegen; liegt der Mittelpunkt auf dem Grundkreis, so wird der inverse Kreis kein Orthogonalkreis, also wieder Mittelpunkt anderswo.

165. Figur 124 wird identisch durch Inversion mit S_i als Mittelpunkt und dem Potenzkreis als Grundkreis. Die einzige Veränderung ist, dass die Seiten des Parallelogramms $M_1 X M_2 Y$ zu Kreisen werden durch S_i und zwar der Reihe nach zu Orthogonalkreisen von M_2 durch P_2, M_1 durch Q_1, M_1 durch P_1 und M_2 durch Q_2. Allerdings ist dabei jede reciproke Strecke rückwärts S_i anzutragen.

166. Man untersucht die inverse Figur zu 133, indem man an Stelle der drei gleichgrossen Kreise drei Gerade setzt, die gleichen Abstand vom Punkte P haben und Winkel von 60 Grad bilden. Es entsteht also ein gleichseitiges Dreieck mit P als Mittelpunkt und und dem Umkreis der Kreise $M_1 M_2 M_3$ als eingeschlossenem Kreis.

167. Einem Parallelstreifen mit Reihe der Berührungskreise entspricht je nach Lage des Transformationsmittelpunktes ausserhalb, innerhalb oder auf dem Streifenrand ein einschliessend oder ausschliessend berührendes Paar von zwei Kreisen bezw. Kreis und Geraden, nebst der darin liegenden, diesmal unendlichen Reihe von Berührungskreisen, deren Berührungspunkte wieder auf einem Kreise liegen.

168. Durch jede der 6 Ecken eines vollständigen Sechsecks gehen 5 Seiten, auf jeder der 15 Seiten liegen 6 Nebenecken, und jede der 15 Seiten kann jede der 6 nicht durch die gleichen 2 Ecken gehenden Seiten viermal als Gegenseite erhalten.

Auf jeder der 6 Seiten eines vollständigen Sechsseits liegen 5 Ecken; durch jede der 15 Ecken gehen 6 Nebenseiten; und jede der 15 Ecken kann jede der 6 nicht auf denselben zwei Seiten liegenden Ecken viermal als Gegenecke erhalten.

169. Beim regelmässigen Sechseck liegen ganz von selbst alle sechs Punkte $XYZUVW$ auf einer Geraden, nämlich der unendlich fernen, denn es gehen die Diagonalen durch den Mittelpunkt, und sowohl die Gegenseiten des eingeschriebenen als die des umgeschriebenen Sechsecks sind parallel, schneiden einander also auf der Polaren des Mittelpunktes.

170. Man bezeichnet in Figur 94 oder 95 das gesuchte Element mit C, dann liefern die gegebenen Elemente die Punkte Y und Z bezw. den Punkt P, also kennt man Punkt X durch AB oder die Geraden CP durch Punkt G.







